1.1.7 Poser $z = x + yi$ et résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations ci-dessous :

a) $8z + 5\bar{z} = 4 + 3i$

b) $z^2 + 2\bar{z} + 5 = 0$

c) $2\,\Im(\bar{z} + 1) + 2i\,\Re(-z + 2) = -1 - 12i$

b) $(x+yi)^2 + 2(x-yi) + 5 = 0$

$$x^2 - y^2 + 2xyi + 2x - 2yi + 5 = 0$$

$$(x^2 - y^2 + 2x + 5) + (2xy - 2y)i = 0$$

$$z = 0 \iff \begin{cases} \operatorname{Re}(z) = 0 \\ \operatorname{Im}(z) = 0 \end{cases}$$

Nous avons le système :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 2x + 5 = 0 \\ 2xy - 2y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - y^2 + 2x + 5 = 0 \\ 2y(x-1) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 1 \\ 1 - y^2 + 2 + 5 = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} y = 0 \\ \underbrace{x^2 + 2x + 5 = 0}_{\Delta = 4 - 20 < 0 \quad \text{pas de solution !}} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 1 \\ y^2 = 8 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 1 \\ y = \pm\sqrt{8} \end{cases}$$

$$S = \{1 + \sqrt{8}i \,;\, 1 - \sqrt{8}i\} = \{1 \pm 2\sqrt{2}i\}$$

c) $2\,\Im(\bar{z}+1) + 2i\,\Re(-z+2) = -1-12i$

$$z = x+yi \quad , \quad \bar{z} = x-yi \quad , \quad \mathrm{Im}(z) = y \quad , \quad \mathrm{Re}(z) = x$$

$$2\,\mathrm{Im}(x-yi+1) + 2i\,\mathrm{Re}(-x-yi+2) = -1-12i$$

$$2\,\mathrm{Im}(x+1-yi) + 2i\,\mathrm{Re}(-x+2-yi) = -1-12i$$

$$2(-y) + 2i(-x+2) = -1-12i$$

$$-2y - 2xi + 4i = -1-12i$$

$$-2y - 2xi = -1-16i$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2y = -1 \\ -2x = -16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} y = \frac{1}{2} \\ x = 8 \end{matrix} \Rightarrow \quad z = 8 + \frac{1}{2}i$$

1.1.8 Soit z un nombre complexe. Démontrer que

$$① \; z+\bar{z}=2\,\Re(z),\; ② \; z-\bar{z}=2\,\Im(z)\,i \quad \text{et} \; ③ \; z\bar{z}=\Re(z)^2+\Im(z)^2$$

Posons $z = x+yi$. On a $\bar{z} = x-yi$, $Re(z) = x$, $Im(z) = y$.

① $z+\bar{z} = x+yi+x-yi = 2x = 2\,Re(z)$

$$\boxed{Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}}$$

② $z-\bar{z} = x+yi-(x-yi) = x+yi-x+yi = 2yi = 2\,Im(z)\,i$

$$\boxed{Im(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}}$$

③ $z\bar{z} = (x+yi)(x-yi) = x^2+y^2 = Re(z)^2+Im(z)^2$

1.1.9 Montrer que si w est une solution de l'équation réelle $az^2 + bz + c = 0$, alors $\bar{w}$ en est une aussi.

Exemple $\quad x^2 - 2x + 2 = 0$

$\Delta = 4 - 8 = -4 < 0$ pas de solution réelle.

$z = 1 + i$ est une solution de l'équation. En effet :

$$(1+i)^2 - 2(1+i) + 2 = 1 + \cancel{2i} + i^2 \cancel{-2} - \cancel{2i} \cancel{+2} = 0$$

On a aussi $\bar{z} = 1 - i$ est aussi une solution. En effet :

$$(1-i)^2 - 2(1-i) + 2 = 1 - \cancel{2i} + i^2 \cancel{-2} \cancel{+2i} + \cancel{2} = 0$$