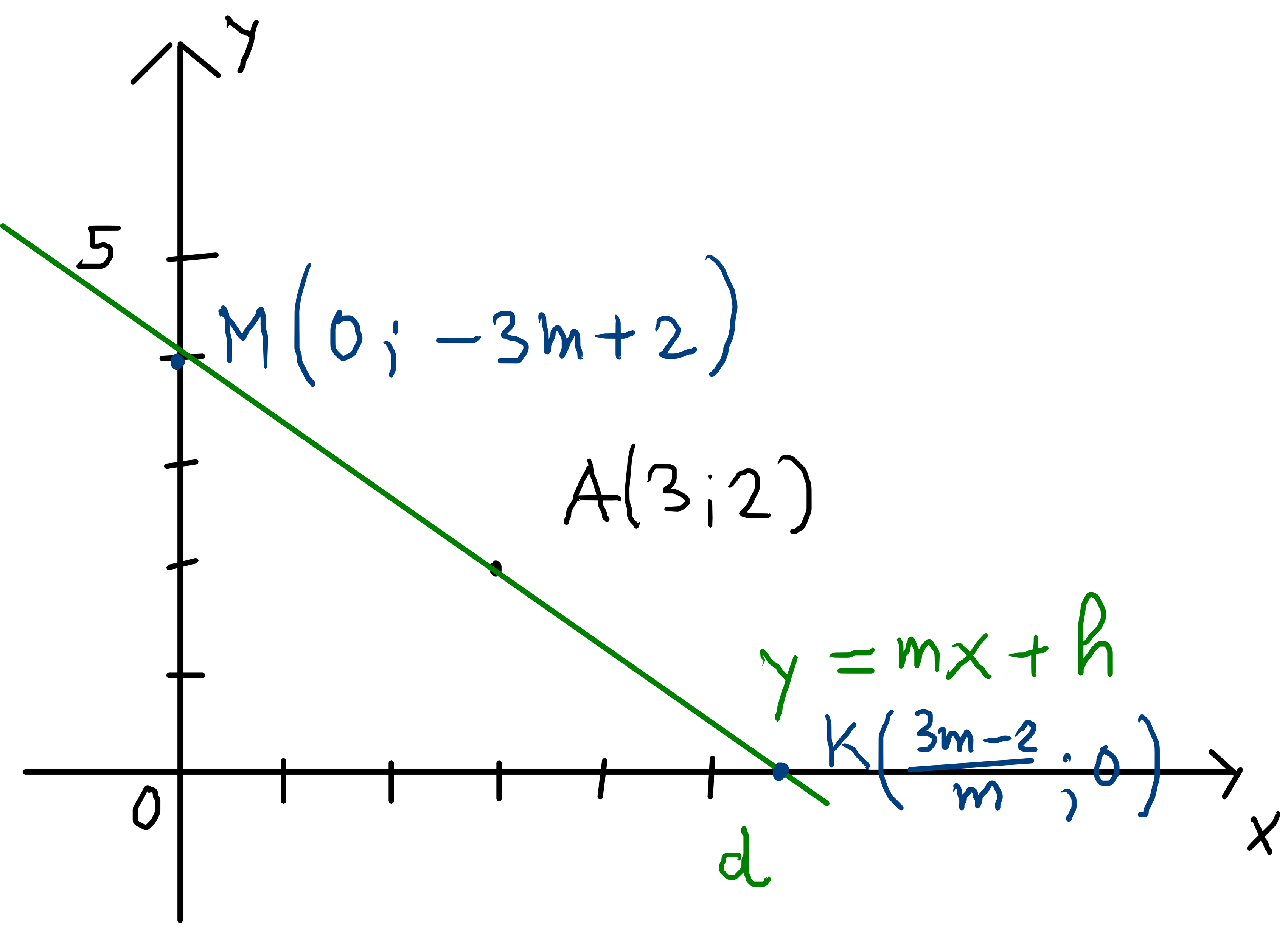
27.03.24

2.10.17 Calculer l'équation de la droite de pente négative qui passe par le point $A(3;2)$ et qui délimite avec les axes de coordonnées un triangle d'aire minimale.



Aire : $\frac{1}{2} OK \cdot OM$

1) $A \in d$: $2 = m \cdot 3 + h \Rightarrow h = -3m + 2$

(d) : $y = mx + (-3m + 2)$, $m < 0$

2) $M(0; ?)$, si $x = 0$:

$$y = -3m + 2$$

3) $K(?; 0)$, si $y = 0$:

$$0 = mx + (-3m + 2)$$

$$mx = 3m - 2$$

$$x = \frac{3m - 2}{m} \quad , \quad m < 0$$

4) L'aire du ΔKOM :

$$\sigma(m) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3m - 2}{m} \cdot (-3m + 2) \quad , \quad m \in \mathbb{R}^*_-$$

$$\sigma(m) = \frac{-(3m - 2)^2}{2m}$$

5) Dérivons σ pour trouver le minimum :

$$\sigma(m) = \frac{-(3m-2)^2}{2m} \qquad m < 0$$

$$u = -(3m-2)^2 \; ; \; u' = -2(3m-2)\cdot 3 = -6(3m-2)$$

$$v = 2m \; ; \; v' = 2$$

$$\sigma'(m) = \frac{-6(3m-2)\cdot 2m - \left(-(3m-2)^2\right)\cdot 2}{4m^2} = \frac{2(3m-2)\left[-6m + (3m-2)\right]}{4m^2}$$

$$= \frac{(3m-2)(-3m-2)}{2m^2} = \frac{-(3m+2)(3m-2)}{2m^2}$$

zéros de σ' : $-\frac{2}{3}$ et $\frac{2}{3}$

à exclure

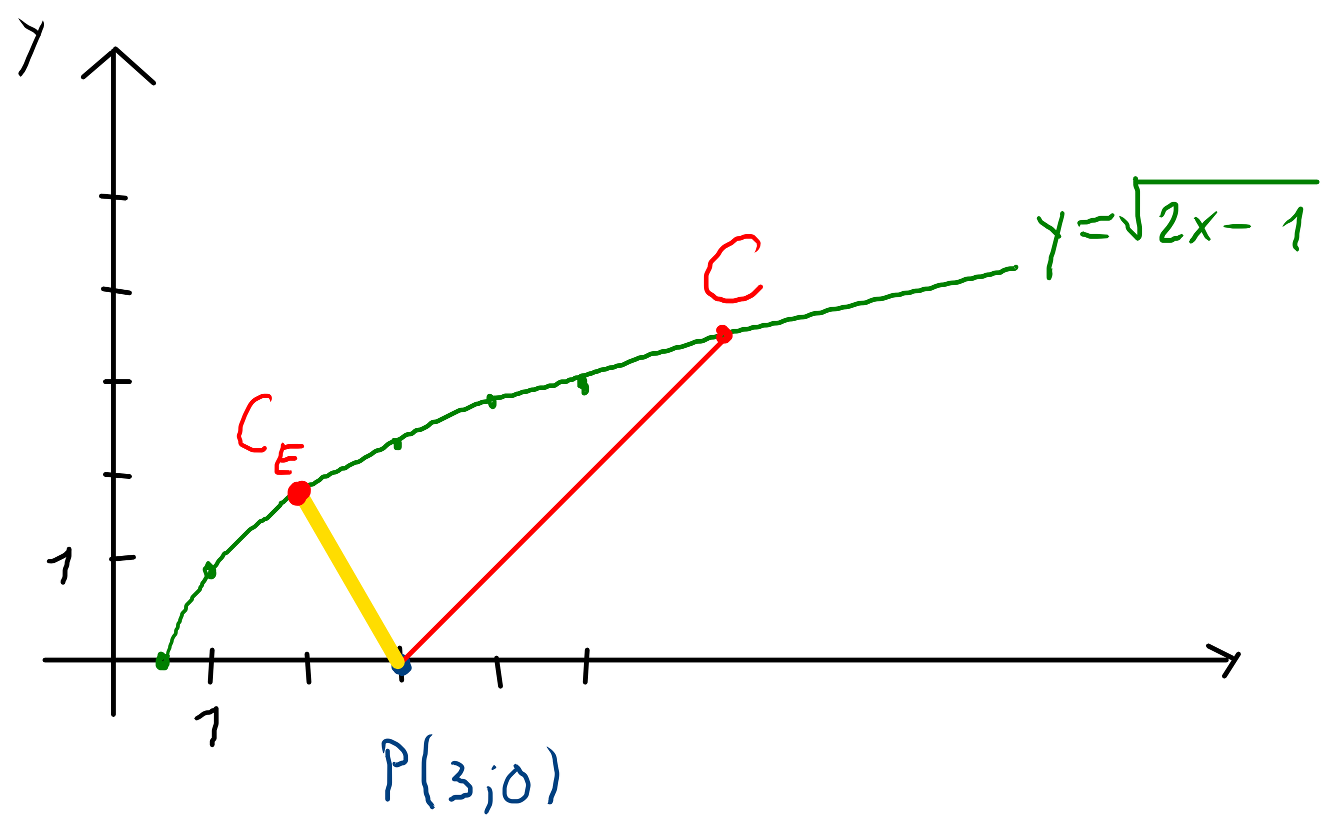
m		$-\frac{2}{3}$		0
$\sigma'(m)$	$-$	0	$+$	$\Vert$
$\sigma(m)$	$\searrow$	min	$\nearrow$	$\Vert$

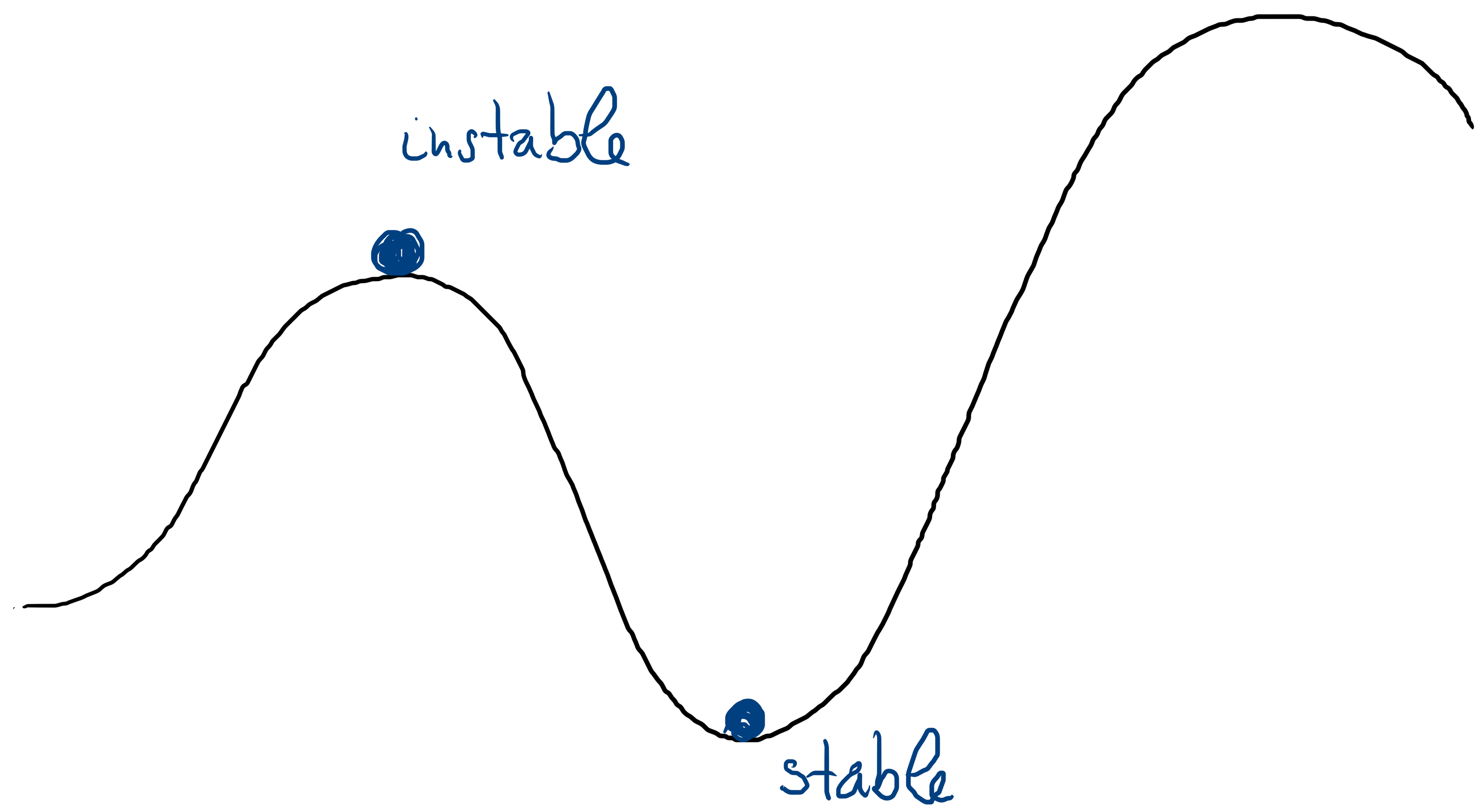
min si $m = -\frac{2}{3}$

6) $$h = -3m + 2 = -3\cdot\frac{-2}{3} + 2 = 4$$

$$\boxed{(d) : y = -\frac{2}{3}x + 4}$$

2.10.18 Quel est le point de la courbe $y = \sqrt{2x-1}$ qui est le plus proche du point $P(3;0)$?





$y = f(x), \quad f(x) = \sqrt{2x-1} \quad , \quad x \geq \frac{1}{2}$

1) Soit C sur la courbe. Soit a l'abscisse de C :

$$C\left(a \,;\, \sqrt{2a-1}\right)$$

2) Il faut minimiser la distance PC.

$$\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} a \\ \sqrt{2a-1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-3 \\ \sqrt{2a-1} \end{pmatrix}$$

$$\|\overrightarrow{PC}\| = \sqrt{(a-3)^2 + \left(\sqrt{2a-1}\right)^2}$$

$$= \sqrt{a^2 - 6a + 9 + 2a - 1} = \sqrt{a^2 - 4a + 8}$$

3) Posons $S(a) = \sqrt{a^2 - 4a + 8}$. Déterminons ses extrema.

$$S'(a) = \frac{2a - 4}{2\sqrt{a^2 - 4a + 8}} \qquad a \geq \frac{1}{2}$$

a	$\frac{1}{2}$		2	
$S'(a)$		$-$	0	$+$
$S(a)$	$\boxed{\text{max}}$	$\searrow$	$\boxed{\text{min}}$	$\nearrow$

Le point le plus proche est $C_E(2 \,;\, \sqrt{3})$