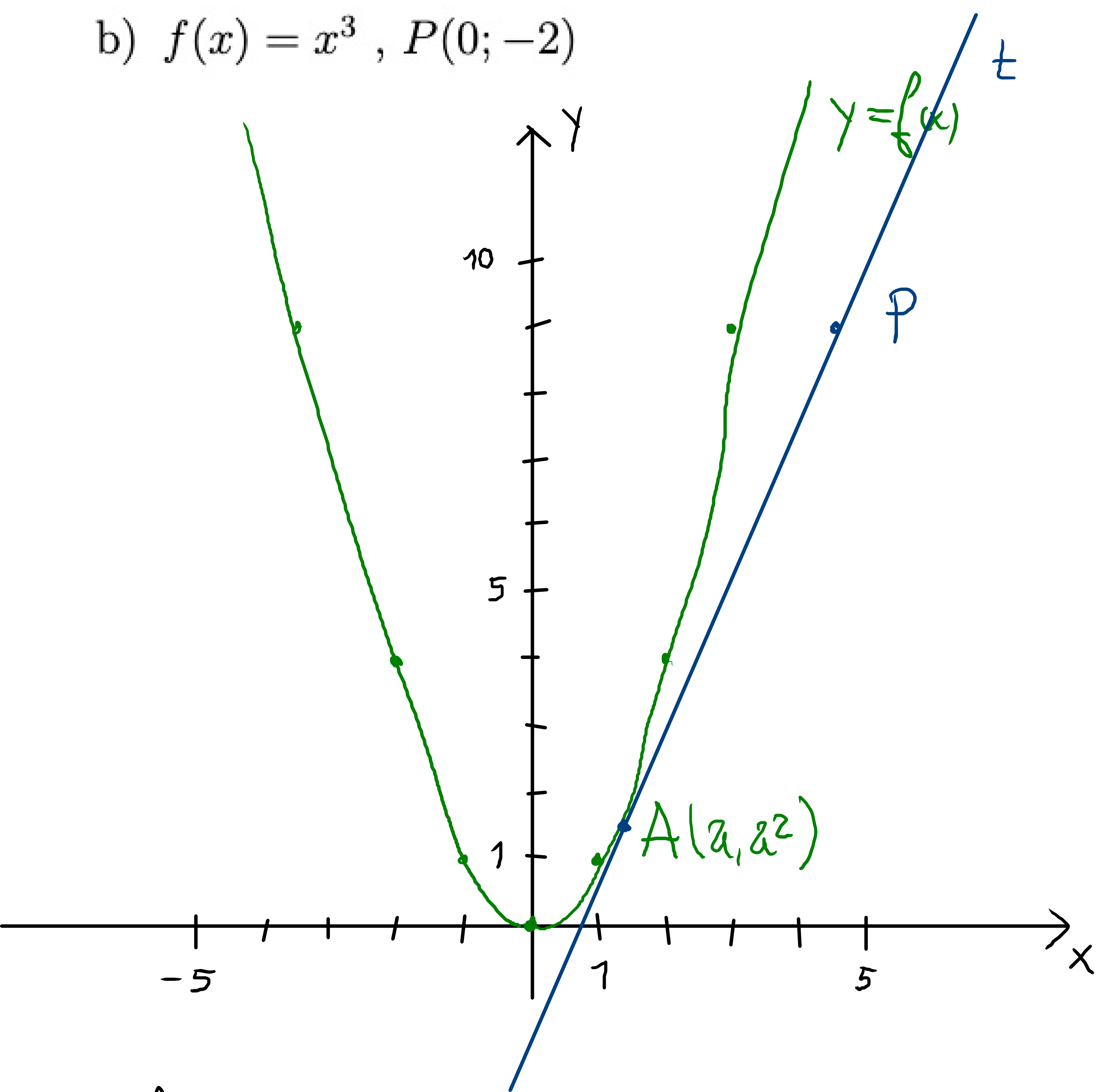
28.02.24

2.9.23 Déterminer les équations des tangentes au graphe de f issues du point P :

a) $f(x) = x^2$, $P(5;9)$

b) $f(x) = x^3$, $P(0;-2)$



L'équation de la tangente à $y=f(x)$ passant pa $P(5;9)$ s'écrit

$(t) : y = mx + h$

Posons $A(a ; a^2)$ le point de contact de la tangente et de la courbe

$f(x) = x^2$

$f'(x) = 2x$; $\frac{d}{dx} y = 2x$

① $(t) : y = 2ax + h$

② A est sur la courbe :

$a^2 = 2a \cdot a + h \Rightarrow h = -a^2$

$(t) : y = 2ax - a^2$

③ P est sur la droite :

$9 = 2 \cdot a \cdot 5 - a^2$

$a^2 - 10a + 9 = 0$

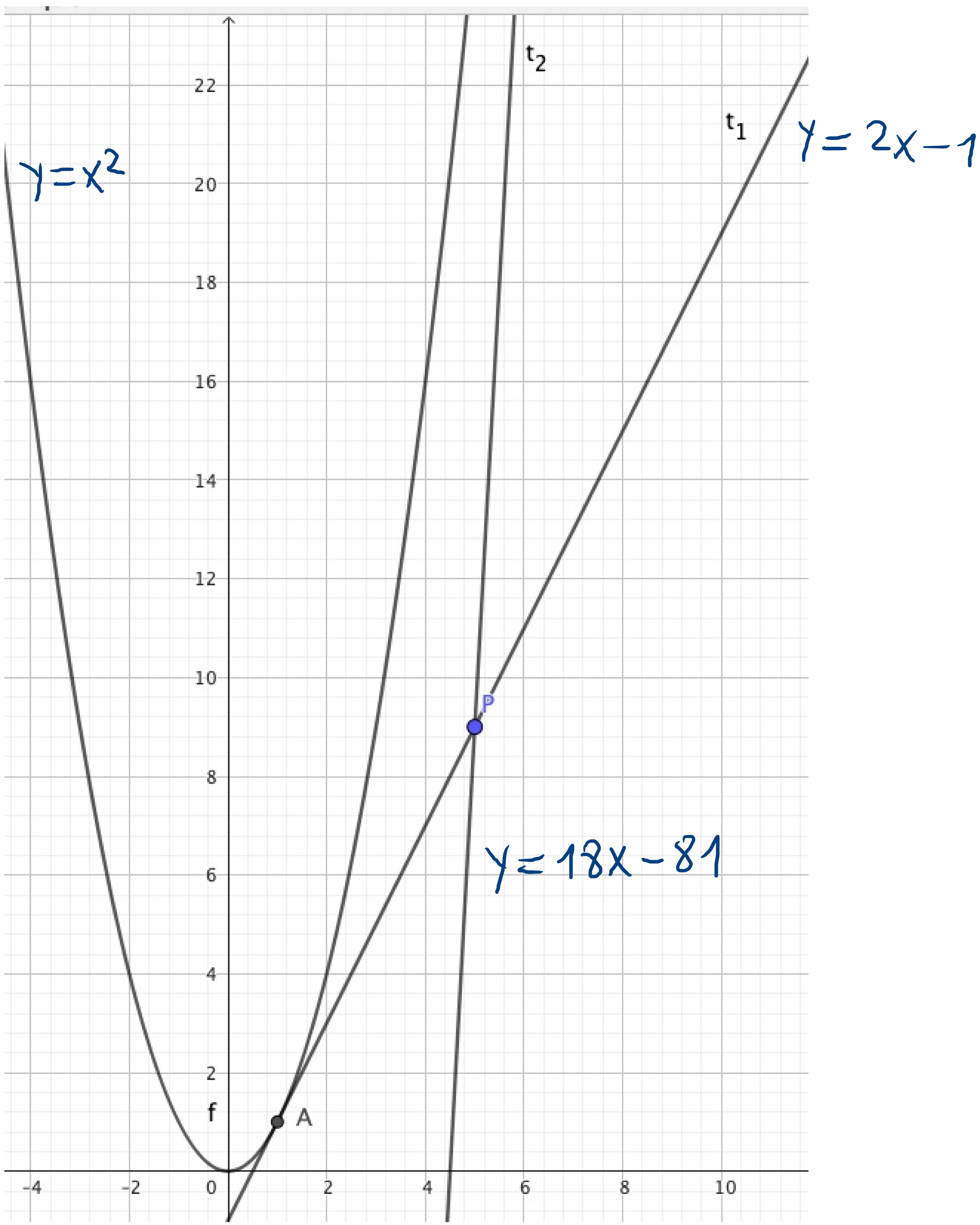
④ On résout cette équation :

$a^2 - 10a + 9 = 0$

$(a-9)(a-1) = 0$

4.1) $a = 1$: $y = 2x - 1$

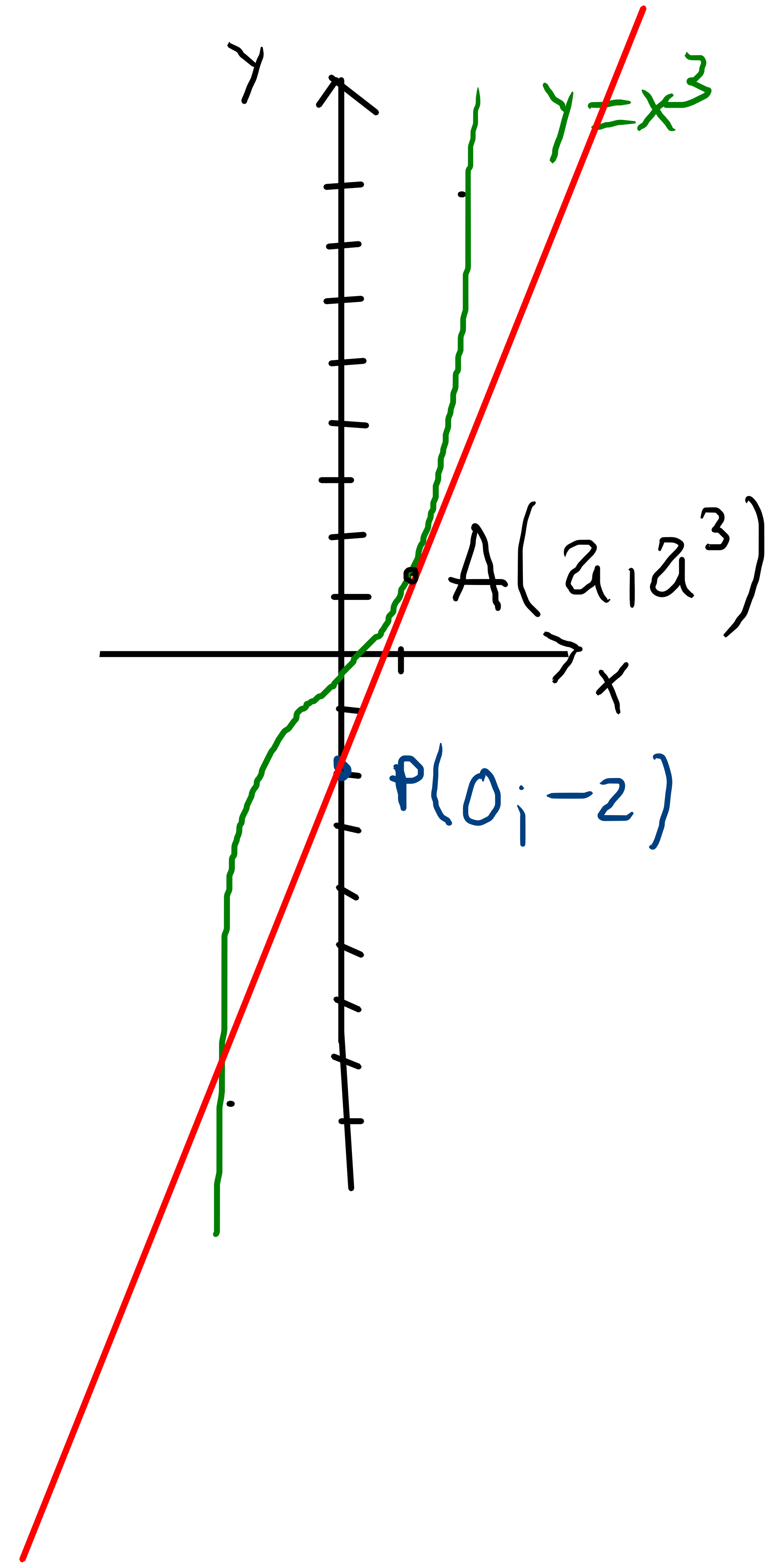
4.2) $a = 9$: $y = 18x - 81$



$y = x^2$
$y = 2x - 1$
$y = 18x - 81$
t_1
t_2
f
A
P
22
20
18
16
14
12
10
8
6
4
2
-4
-2
0
2
4
6
8
10

b) $y = x^3$ $\qquad P(0; -2)$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2$$



① $(t): y = mx - 2$

② $(t): y = 3a^2x - 2$

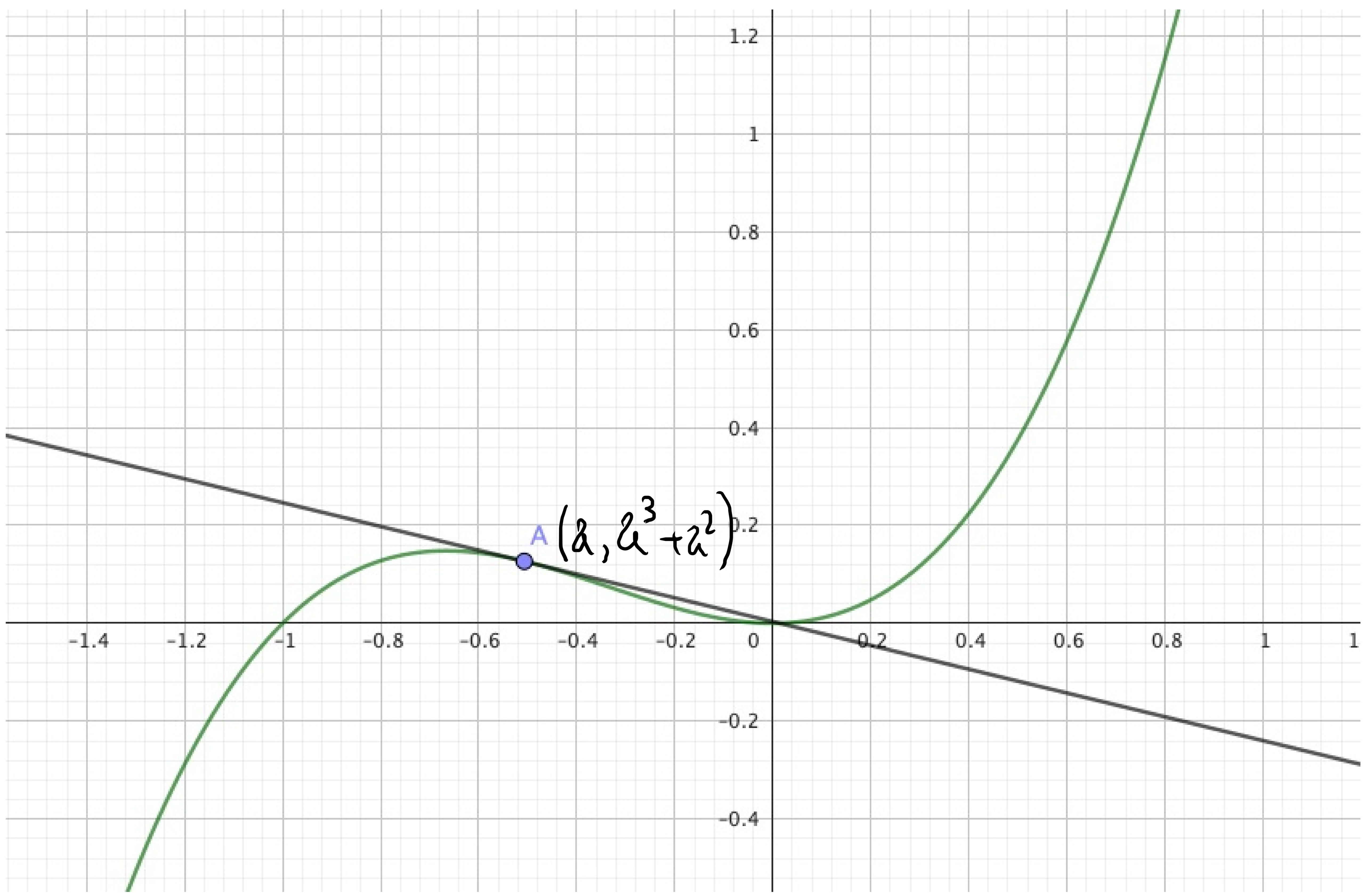
$$a^3 = 3a^3 - 2$$

$$\Rightarrow 2a^3 = 2$$

$$a^3 = 1 \Rightarrow a = 1$$

$$(t): \underline{y = 3x - 2}$$

2.9.24 Quels sont les points de la courbe $y = x^3 + x^2$ en lesquels la tangente passe par l'origine ?



① $A(a, a^3 + a^2)$

② $(t) : y = mx$

③ $\dfrac{dy}{dx} = 3x^2 + 2x$

④ $(t) : y = (3a^2 + 2a)x$

⑤ $a^3 + a^2 = (3a^2 + 2a)\,a$

$a^3 + a^2 = 3a^3 + 2a^2$

$2a^3 + a^2 = 0$

$a^2(2a + 1) = 0$

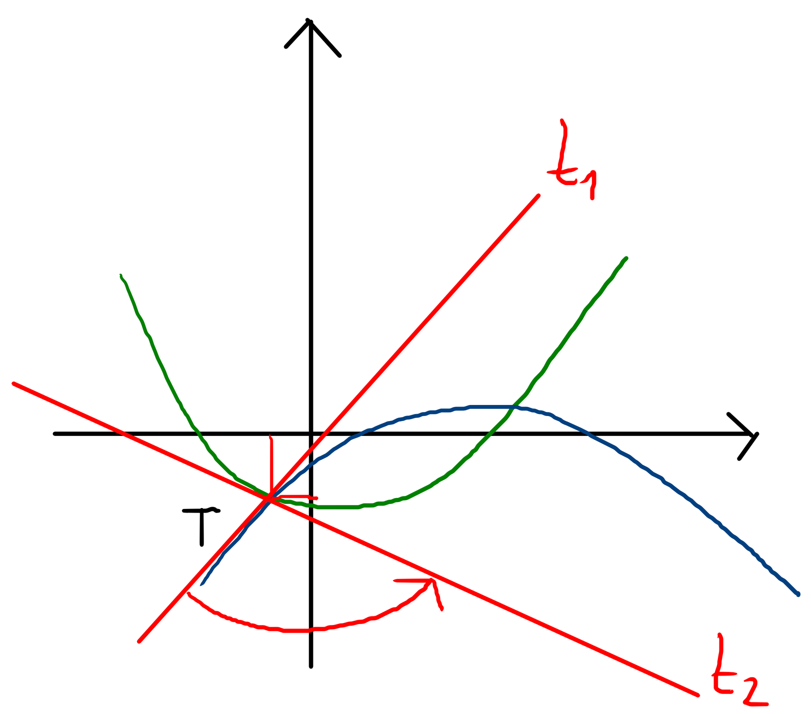
$\downarrow \qquad \searrow$

$a = 0 \qquad a = -\frac{1}{2}$

Les points de la courbe : $A_0(0,0) = O$ et $A\left(-\frac{1}{2} ; \frac{1}{8}\right)$

2.9.25 Calculer l'angle formé par les courbes en leurs points d'intersection :

a) $y = x^2$ et $y = x^3$,



Si deux courbes se coupent en un point T, l'angle formé par ces courbes est l'angle formé par les deux tangentes en T.

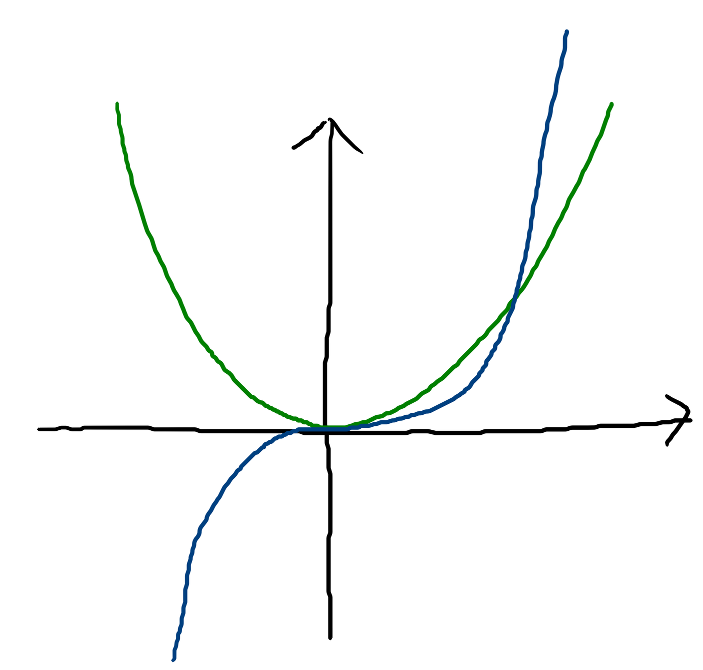
① Point d'intersection :

$$x^3 = x^2$$
$$x^3 - x^2 = 0$$
$$x^2(x-1) = 0$$

$T_1\ (0,0)$ $\qquad$ $T_2\ (1,1)$

② $1^{ère}$ courbe $\dfrac{dy}{dx} = 2x$

$2^{ème}$ courbe $\dfrac{dy}{dx} = 3x^2$



<u>Angle en T_1 :</u>

$1^{ère}$ courbe : $m_1 = 0$

$2^{ème}$ courbe : $m_2 = 0$

$\}$ angle $0°$

<u>Angle en T_2 :</u>

$1^{ère}$ courbe : $m_1 = 2$

$2^{ème}$ courbe : $m_2 = 3$

Formulaire de Gybur

$$\boxed{\tan(\varphi) = \left| \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2} \right|}$$

CRM

Angle aigu de deux droites $\cos(\varphi) = \dfrac{|\vec{d_1} \cdot \vec{d_2}|}{\|\vec{d_1}\|\|\vec{d_2}\|} = \dfrac{|\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}|}{\|\vec{n_1}\|\|\vec{n_2}\|}$

$$\tan(\varphi) = \left| \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \right|$$

Angle φ entre deux vecteurs :

$$\boxed{\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{\| \vec{a} \| \cdot \| \vec{b} \|}}$$

Angle de deux vecteurs

On note φ l'angle de $\vec{a}$ et $\vec{b}$ $(0 \leq \varphi \leq 180°)$. $\boxed{\cos(\varphi) = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\|\ \|\vec{b}\|}}$

$$\tan(\varphi) = \left| \frac{3 - 2}{1 + 2 \cdot 3} \right| = \frac{1}{7} \Rightarrow \underline{\underline{\varphi \cong 8,13°}}$$