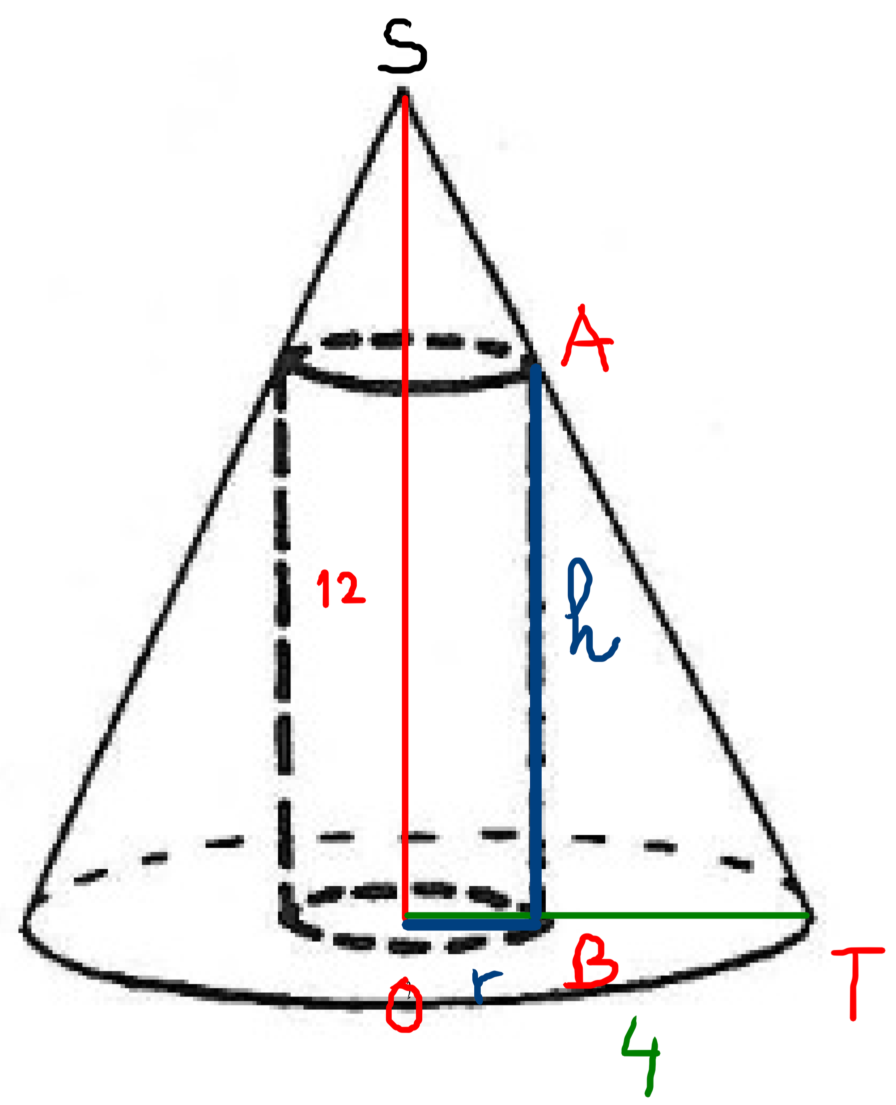
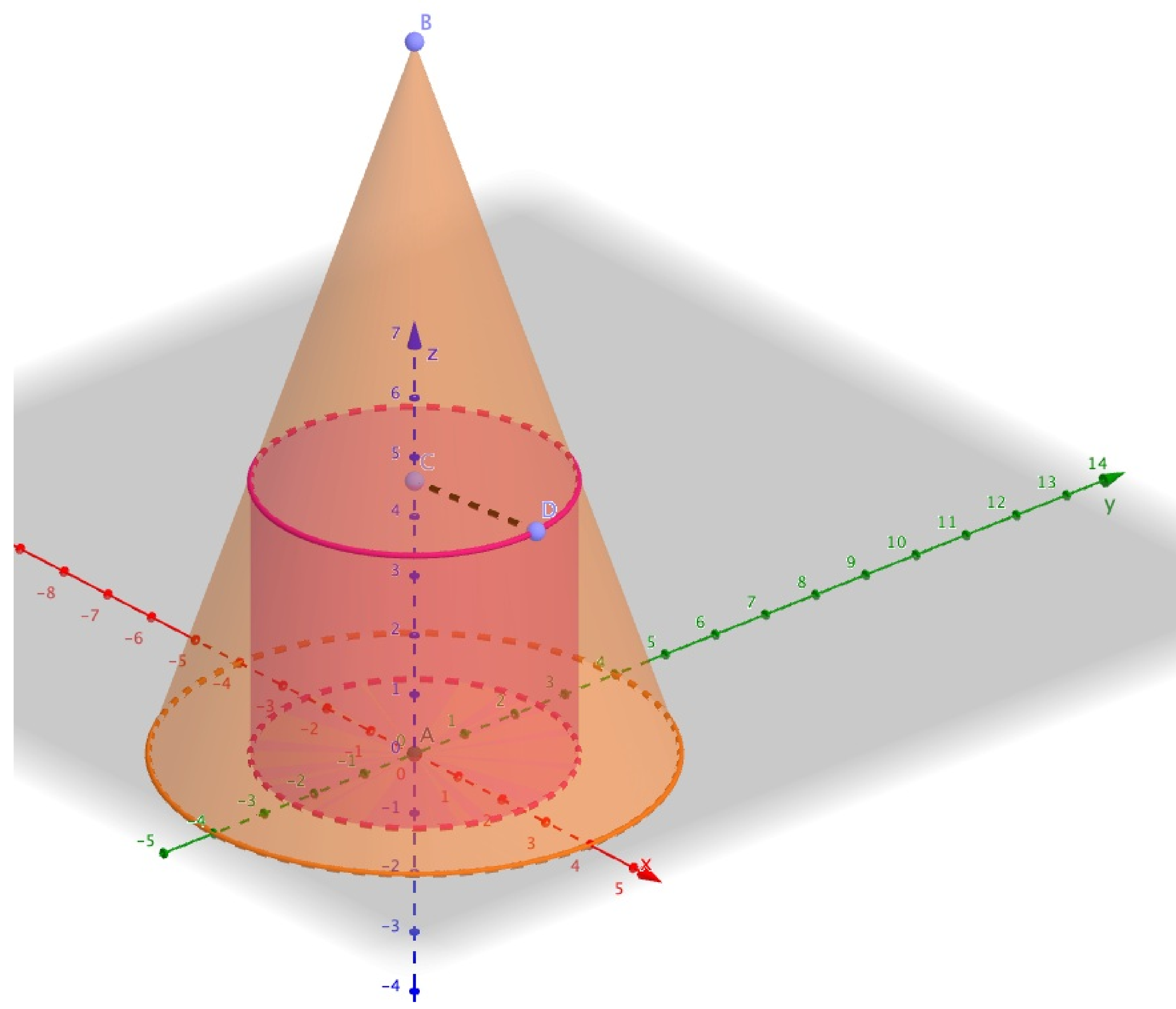
29.05.24

2.10.25 Calculer les dimensions du cylindre de plus grand volume qu'il est possible de cacher sous un cône circulaire droit de rayon 4 cm et de hauteur 12 cm.





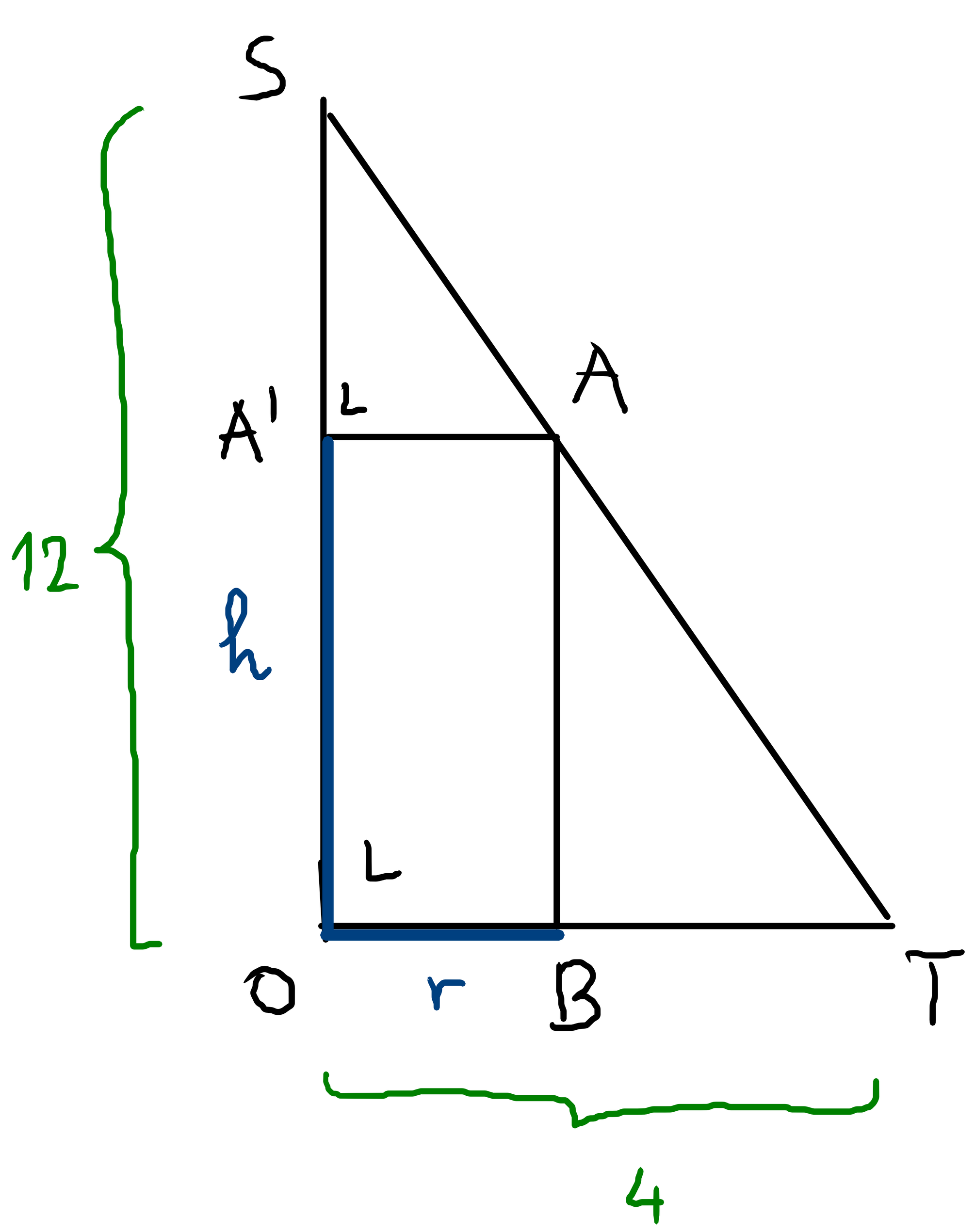
$OS = 12$ [cm]

$OT = 4$ [cm]

$BA = h$

$OB = r$

Volume du cylinde $V = \pi r^2 h$



$$\frac{SA'}{12} = \frac{OB}{4} \iff \frac{SA'}{OB} = \frac{12}{4} = \frac{3}{1}$$

$$\frac{12-h}{r} = \frac{3}{1} \iff 3r = 12 - h$$

$$\iff h = 12 - 3r$$

avec $0 < r < 4$

On optimise la fonction

$$V = V(r) = \pi r^2 (12 - 3r) \quad \text{avec} \quad 0 < r < 4$$

$$V(r) = \pi r^2 (12 - 3r) = 3\pi\, r^2 (4 - r)$$

$$V'(r) = 3\pi \left[2r(4-r) + r^2 \cdot (-1) \right]$$

$$= 3\pi \left[8r - 2r^2 - r^2 \right] = 3\pi \left(8r - 3r^2 \right)$$

$$= 3\pi \; r(8 - 3r)$$

$$V'(r) = 0 \iff \begin{array}{l} r = 0 \\ r = \frac{8}{3} \end{array}$$

Tableau de la croissance

r		0		$8/3$		4	
$V'(r)$	$-$	0	$+$	0	$-$	|	
$V(r)$		||	$\nearrow$	max	$\searrow$	||	

Le max est atteint lorsque $\boxed{r = \frac{8}{3}\ [cm]}$ et $\boxed{h = 4\ [cm]}$

Dérivée de e^x

Calculons $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$. Cette limite est indéterminée.

Changement de variable : $u = e^x - 1 \Leftrightarrow u + 1 = e^x \Leftrightarrow \ln(1+u) = x$

On a $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = \lim\limits_{u \to 0} \dfrac{u}{\ln(1+u)} = \lim\limits_{u \to 0} \dfrac{1}{\frac{1}{u} \ln(1+u)}$

$$= \lim_{u \to 0} \frac{1}{\ln(1+u)^{\frac{1}{u}}} \overset{\text{↯}}{=} \frac{1}{\lim\limits_{u \to 0} \ln(1+u)^{\frac{1}{u}}} \overset{\text{↯}}{=} \frac{1}{\ln\left(\lim\limits_{u \to 0} (1+u)^{\frac{1}{u}}\right)}$$

Maxi résultat : $\lim\limits_{u \to 0} (1+u)^{\frac{1}{u}} = e$

$$= \frac{1}{\ln(e)} = 1$$

Donc $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

$$(e^x)' = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^x \cdot e^h - e^x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{e^x(e^h - 1)}{h} = e^x \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h}}_{1} = e^x$$

$$\boxed{\begin{aligned} (e^x)' &= e^x \\ (e^u)' &= u' e^u \end{aligned}}$$

$$\left(e^{x^2+x}\right)' = e^{x^2+x}\,(x^2+x)'$$
$$= (2x+1)\cdot e^{x^2+x}$$

Dérivée $(\ln(x))'$

Fonction	Sa dérivée
x^3	$3x^2$
x^2	$2x$
x	1
1	0
$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\frac{1}{x^2} = x^{-2}$	$\frac{-2}{x^3}$

$< \frac{1}{x}$ où est-il passé ?

$$\boxed{\begin{aligned} (\ln(x))' &= \frac{1}{x} \\ \ln(u) &= \frac{u'}{u} \end{aligned}}$$

$$x = \ln(x) \Leftrightarrow x = e^y$$

$$(\ln(x))' = \frac{1}{(e^y)'} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}$$

4.2.12 Une étude a montré que l'indice de satisfaction (sur une échelle de 1 à 10) des clients abonnés à un service Internet était donné par la fonction s définie par

$$s(t) = \frac{20\ln(t+1)+t}{t+1} \qquad t \geq 1$$

où t représente le nombre de mois écoulés depuis le début de l'abonnement (cette fonction n'est valable qu'à partir de la fin du 1$^{\text{er}}$ mois).

a) Quel est l'indice de satisfaction après 5 mois d'abonnement (réponse à deux décimales) ?

b) Si l'abonnement est conclu le 1$^{\text{er}}$ janvier, au cours de quel mois l'indice de satisfaction est-il maximal ?

c) Calculer $\lim\limits_{t\to+\infty} s(t)$.

a) $S(5) = \dfrac{20\ln(6)+5}{6} \cong 6,81$

b) $\dfrac{20\ln(t+1)+t}{t+1} = 10$ [Analyse numérique ☺]

Etablir le tableau de la croissance de $s(t)$.

$s'(t) = \left(\dfrac{20\ln(t+1)+t}{t+1}\right)' = \dfrac{t+21}{t+1}\cdot(t+1) -$ ☺

Ici

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

$u = 20\ln(t+1)+t\,;\qquad u' = 20\,\dfrac{1}{t+1}+1 = \dfrac{20}{t+1}+\dfrac{t+1}{t+1} = \dfrac{t+21}{t+1}$

$v = t+1\,;\qquad v' = 1$

4.2.12 Une étude a montré que l'indice de satisfaction (sur une échelle de 1 à 10) des clients abonnés à un service Internet était donné par la fonction s définie par

$$s(t) = \frac{20\ln(t+1)+t}{t+1} \qquad t \geq 1$$

où t représente le nombre de mois écoulés depuis le début de l'abonnement (cette fonction n'est valable qu'à partir de la fin du 1^{er} mois).

a) Quel est l'indice de satisfaction après 5 mois d'abonnement (réponse à deux décimales) ?

b) Si l'abonnement est conclu le 1er janvier, au cours de quel mois l'indice de satisfaction est-il maximal ?

c) Calculer $\lim_{t\to+\infty} s(t)$.

a) $S(5) = \dfrac{20\ln(6)+5}{6} \cong 6{,}81$

b) $\dfrac{20\ln(t+1)+t}{t+1} = 10$ [Analyse numérique ☺]

Etablir le tableau de la croissance de $s(t)$.

$$s'(t) = \left(\frac{20\ln(t+1)+t}{t+1}\right)' = \frac{\frac{t+21}{\cancel{t+1}}\cdot\cancel{(t+1)} - (20\ln(t+1)+t)\cdot 1}{(t+1)^2} = \ast$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$$

$u = 20\ln(t+1)+t\,;\qquad u' = 20\dfrac{1}{t+1}+1 = \dfrac{20}{t+1}+\dfrac{t+1}{t+1} = \dfrac{t+21}{t+1}$

$v = t+1\,;\qquad v' = 1$

$$\ast = \frac{t+21-20\ln(t+1)-t}{(t+1)^2} = \frac{21-20\ln(t+1)}{(t+1)^2}$$

zéro de la dérivée : $21-20\ln(t+1) = 0$

$20\ln(t+1) = 21$

$\ln(t+1) = \dfrac{21}{20}$

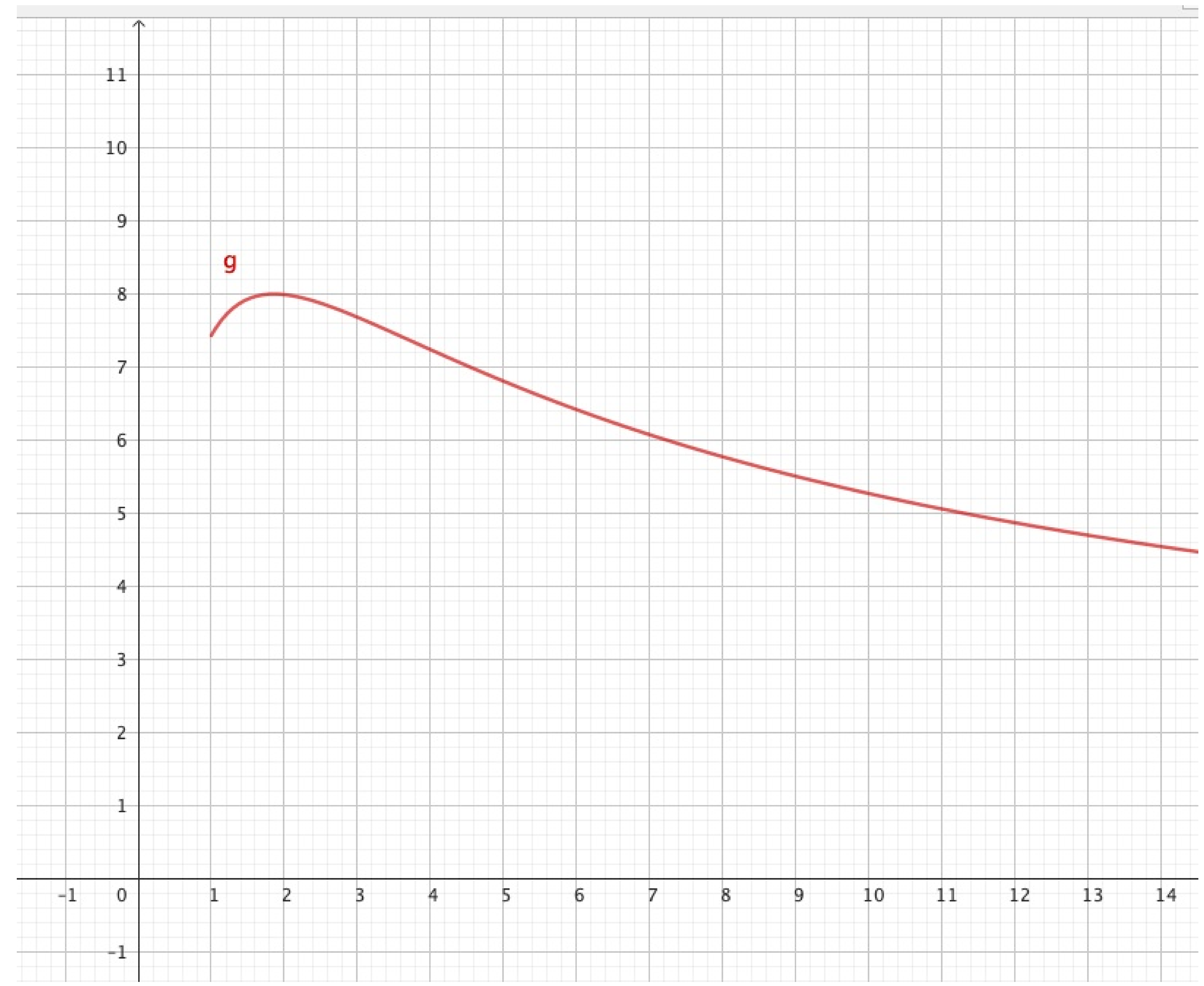
$\ln(y) = x \Leftrightarrow e^x = y$

$t+1 = e^{21/20}$

$t = e^{1{,}05}-1 \cong$ 1.857651118063164

Tableau des variations

t	1		$e^{1,05}-1$	
$s'(t)$		$+$	0	$-$
$s(t)$	$\boxed{\text{min}}$	$\nearrow$	$\boxed{\text{max}}$	$\searrow$



Le max est atteint lorsque $t \simeq 1,86$

Au cours du mois de février, l'indice de satisfaction est maximal.

c)

c) Calculer $\lim\limits_{t \to +\infty} s(t)$.

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{20 \ln(t+1) + t}{t+1} \underset{\text{“}\frac{+\infty}{+\infty}\text{”}}{\overset{\text{BH}}{=}} \lim_{t \to +\infty} \frac{\frac{20}{t+1} + 1}{1} = 1$$