30.08.23

1.1.9 Montrer que si w est une solution de l'équation réelle $az^2 + bz + c = 0$, alors $\bar{w}$ en est une aussi.

Soit $z = x + yi$ une solution de cette équation. Montrons que $\bar{z} = x - yi$ est aussi une solution. En effet :

$$a(x-yi)^2 + b(x-yi) + c = a(x^2 - 2xyi + y^2 i^2) + b(x-yi) + c$$

$$= ax^2 - 2axyi - ay^2 + bx - byi + c$$

$$= (ax^2 - ay^2 + bx + c) - (2axy + by)\, i$$

Comme $x + yi$ est solution, on a :

$$a(x+yi)^2 + b(x+yi) + c = 0$$

$$ax^2 + 2axyi - ay^2 + bx + byi + c = 0$$

$$(ax^2 - ay^2 + bx + c) + (2axy + by)\, i = 0$$

Donc $ax^2 - ay^2 + bx + c = 0$ et $2axy + by = 0$

Donc $a\bar{z}^2 + b\bar{z} + c = 0 \iff az^2 + bz + c = 0$

Représentation graphique des nombres complexes

On peut représenter sans ambiguïté un nombre complexe $z = a + bi$ par le couple (a, b).

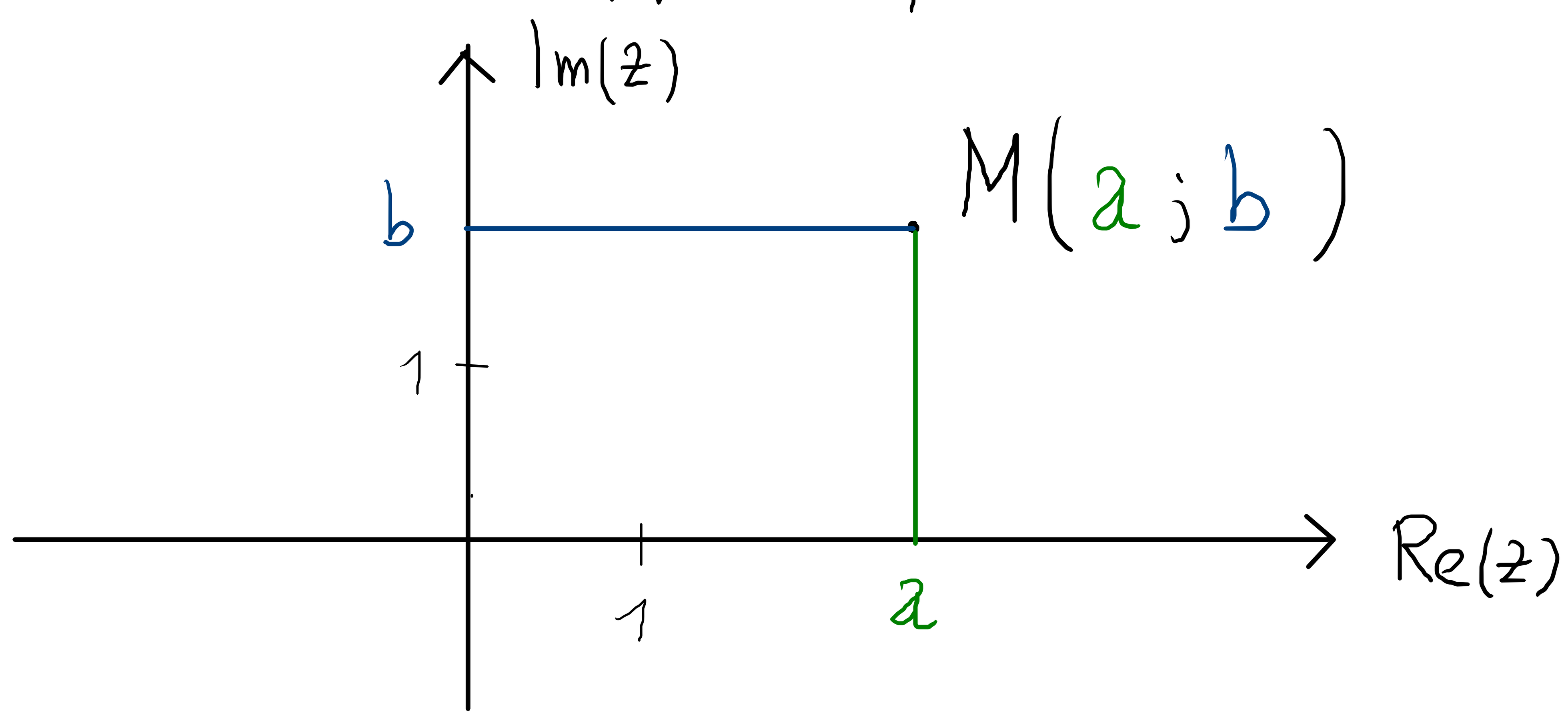
On a ainsi une application bijective de $\mathbb{C}$ dans le plan euclidien $\mathcal{E}_2$ muni d'un repère orthonormé.

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathcal{E}_2 \\ a+bi & \longmapsto & (a, b) \end{array}$$

L'axe OE_1 est appelé l'axe des réels et se note $\mathcal{R}$.

L'axe OE_2 est appelé l'axe des complexes et se note $\mathcal{I}$.

Le plan $\mathcal{E}$ est appelé plan de Gauss ou le plan d'Argand-Cauchy.



$$z = a + bi \iff M(a ; b)$$

On dit que z est l'affixe du point M.

1.2.1 Représenter les points A, B, ..., H dans le plan complexe après avoir calculé, si nécessaire, leurs affixes z_A, z_B, ..., z_H :

a) $z_A = 2 - i$

b) $z_B = -3 + 2i$

c) $z_C = z_A + z_B = -1 + i$

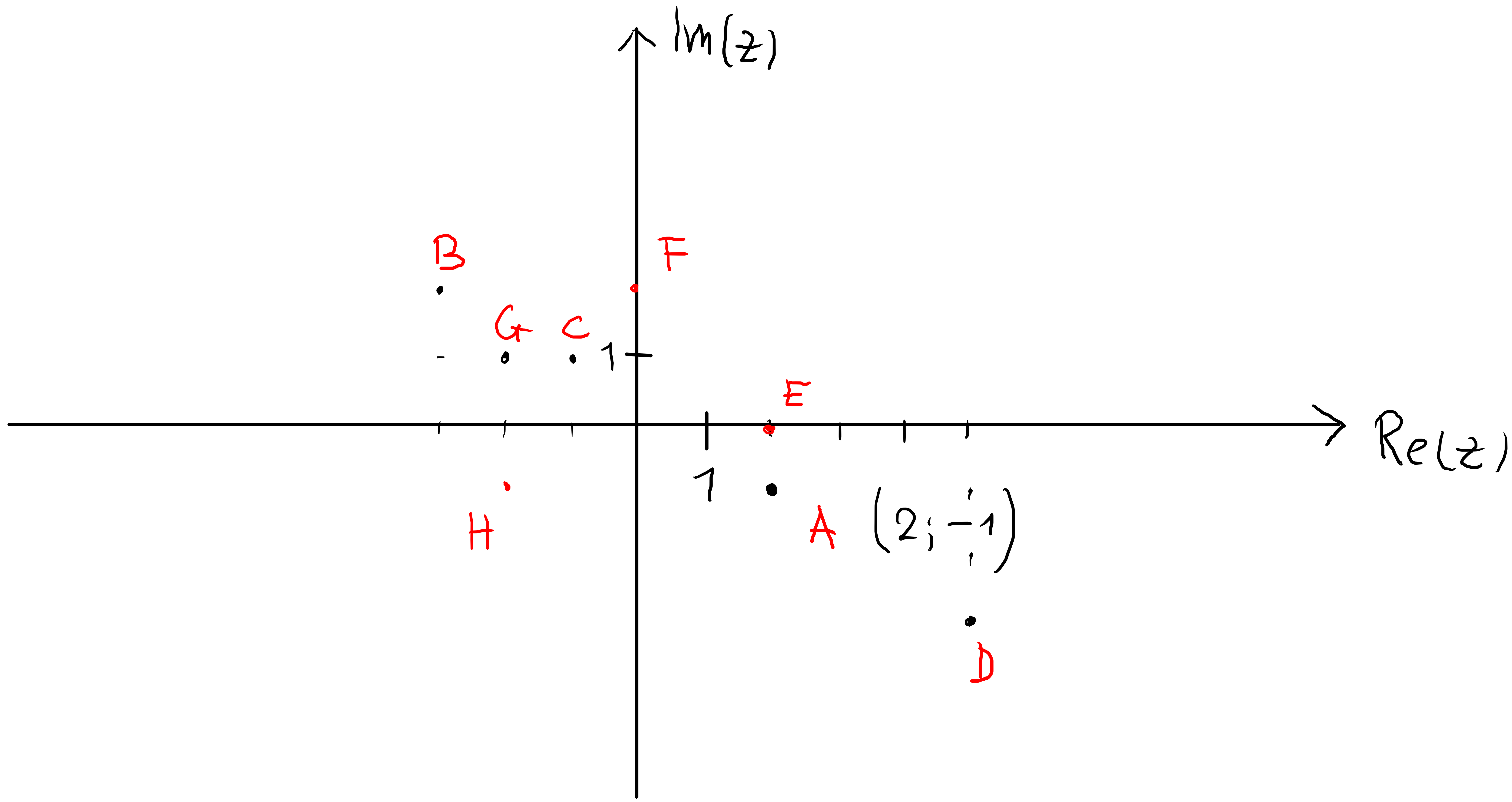
d) $z_D = z_A - z_B = 5 - 3i$

e) $z_E = \frac{z_A + \overline{z_A}}{2} = \frac{2 - i + 2 + i}{2} = 2$

f) $z_F = \frac{z_A - \overline{z_A}}{2} = 2i$

g) $z_G = -z_A = -2 + i$

h) $z_H = -\overline{z_A} = -2 - i$



Propriétés du conjugué

Soit $z = a + bi$ et $z' = a' + b'i$ deux nombres complexes

1) $\overline{z} = 0 \iff z = 0$

2) $\overline{\overline{z}} = z$

3) $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$

4) $\overline{z \cdot z'} = \overline{z} \cdot \overline{z'}$

5) $\overline{-z} = -\overline{z}$

6) $z \neq 0$, $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$

7) $\overline{z^n} = \left(\overline{z}\right)^n$

Démontrons le point 4)

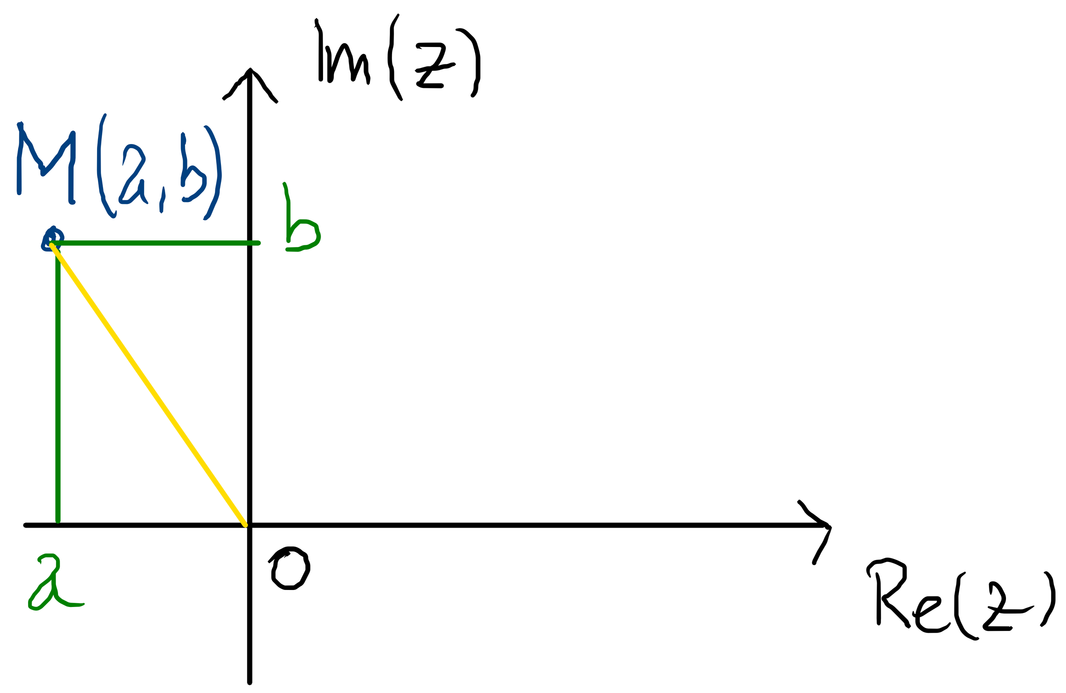
$$\overline{z \cdot z'} = \overline{(a+bi)(a'+b'i)} = \overline{aa' + ab'i + a'bi - bb'} = \overline{aa' - bb' + (ab' + a'b)i}$$

$$= aa' - bb' - (ab' + a'b)i$$

$$\overline{z} \cdot \overline{z'} = \overline{a+bi} \cdot \overline{a'+b'i} = = (a - bi)(a' - b'i) = aa' - bb' - (ab' + a'b)i$$

Le module d'un nombre complexe

Si $z = a + bi \in \mathbb{C}$, on appelle module de z, noté $|z|$, le nombre réel $\sqrt{a^2 + b^2}$.



$z_M = a + bi \iff M(a,b)$

En fait $|z| = \|\overrightarrow{OM}\|$

Exemple : $z = -3 + 4i$, $|z| = 5$

Propriétés :

1) $z = 0 \iff |z| = 0$

2) $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ Inégalité triangulaire

3) $|\lambda z| = |\lambda| \cdot |z|$ où $\lambda \in \mathbb{R}$

$|-3z| = 3\,|z|$

4) $|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$

5) $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$, $z \neq 0$

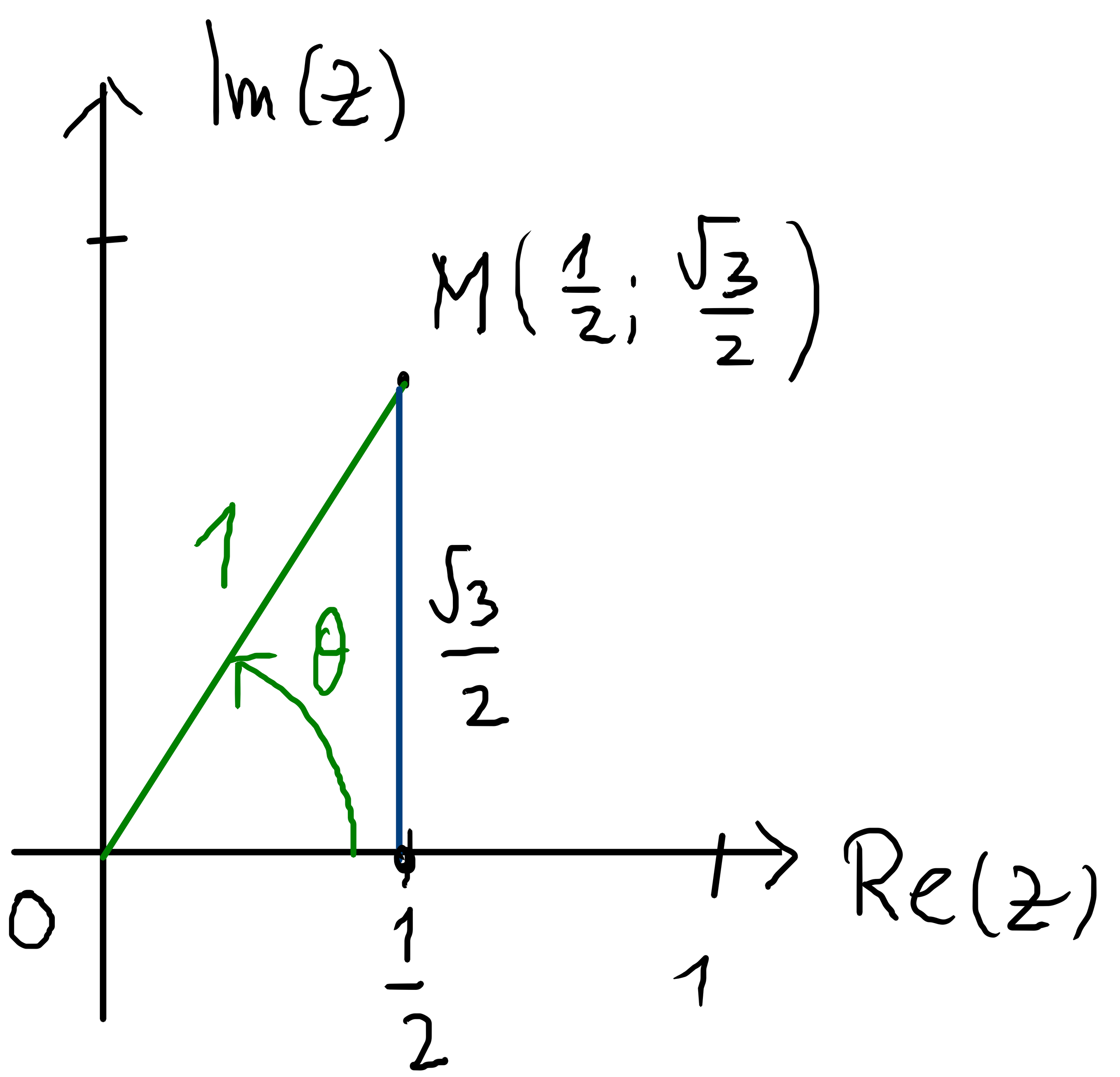
$z = 3 - 4i$, $|z| = 5$

• $\left|\frac{1}{3-4i}\right| = \left|\frac{1}{3-4i} \cdot \frac{3+4i}{3+4i}\right| = \left|\frac{3+4i}{25}\right| = \frac{1}{25}\,|3+4i| = \frac{1}{25} \cdot 5 = \frac{1}{5}$

• $\frac{1}{|3-4i|} = \frac{1}{5}$

Forme trigonométrique des nombres complexes

Soit $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$. On a $M\left(\frac{1}{2} ; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$



Calculons l'angle θ entre $\overrightarrow{OM}$ et l'axe réel.

$$|z| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$$

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \qquad \theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

On note $\boxed{z = \left[1 ; \frac{\pi}{3}\right]}$

On appelle cet angle l'argument de z.

Dans notre cas : $\boxed{z = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) i}$