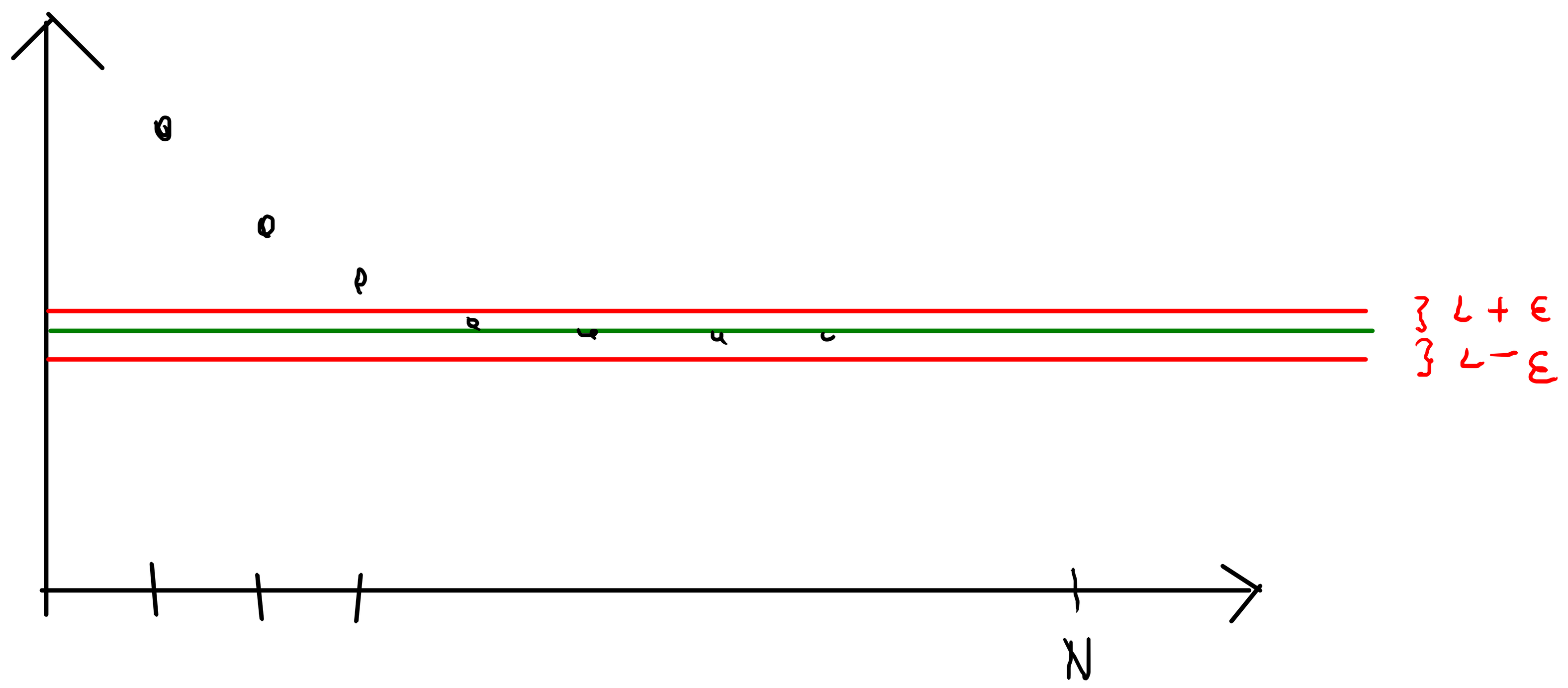
30.11.23

Montrer que la suite $U_n = \frac{n+2}{n+3}$, pour $n \geq 1$, converge vers 1.

Soit $\varepsilon > 0$. Déterminons $N = N(\varepsilon)$ tel que pour tout $n > N$, on a $|U_n - 1| < \varepsilon$



$$\left| \frac{n+2}{n+3} - 1 \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{(n+2)-(n+3)}{n+3} \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{-1}{n+3} \right| < \varepsilon$$

$$\frac{1}{n+3} < \varepsilon \qquad \Big|\ \cdot (n+3)\ , \quad n+3 > 3$$

$$1 < \varepsilon(n+3) \qquad \Big|\ \div \varepsilon\ , \quad \varepsilon > 0$$

$$\frac{1}{\varepsilon} < n+3 \qquad \Big|\ -3$$

$$\frac{1}{\varepsilon} - 3 < n \qquad \Big|\ \leftrightarrow$$

$$n > \frac{1-3\varepsilon}{\varepsilon}$$

Posons $N = \left[\frac{1-3\varepsilon}{\varepsilon} \right]$, alors pour tout $n > N$, on a $|U_n - 1| < \varepsilon$.

Limite infinie

Une suite réelle (U_n) diverge vers $+\infty$, si pour tout $A \in \mathbb{R}_+$, il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n \geq N$, on a $U_n > A$.

On note $\boxed{\lim_{n \to \infty} U_n = +\infty}$

Une suite réelle (U_n) diverge vers $-\infty$, si pour tout $A \in \mathbb{R}_-$, il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n \geq N$, on a $U_n < A$.

On note $\boxed{\lim_{n \to \infty} U_n = -\infty}$

Règles de calcul sur les limites

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to\infty} y_n = y$$

Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a

1) $$\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = x + y$$

2) $$\lim_{n\to\infty} (\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha x + \beta y$$

3) $$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{x}{y} \quad , \text{ si } y \neq 0$$

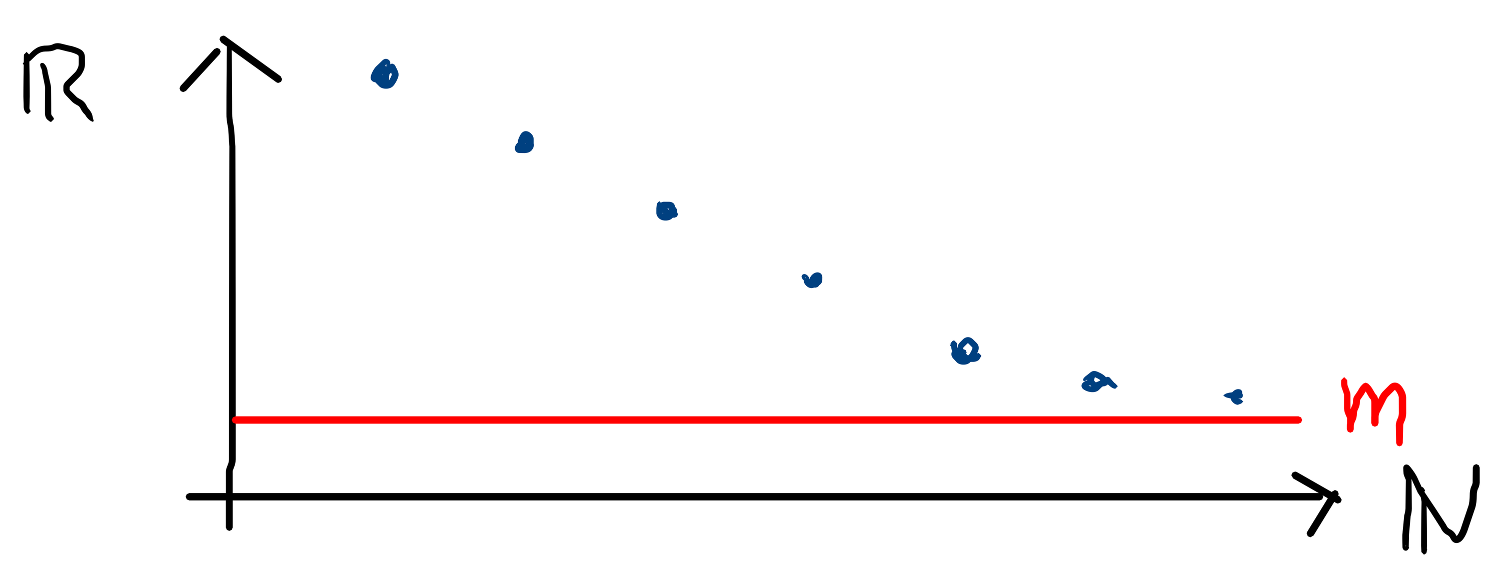
4) $$\lim_{n\to\infty} |x_n| = \left|\lim_{n\to\infty} x_n\right| = |x|$$

Propriétés des limites

1) La limite d'une suite, si elle existe, est unique.

2) Une suite croissante <u>et</u> majorée est convergente

3) Une suite décroissante <u>et</u> minorée est convergente



4) Théorème des deux gendarmes (théorème d'encadrement).

Soit (a_n), (b_n), (c_n) trois suites telles que

a) $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \lim\limits_{n \to \infty} c_n = L$

b) $a_n \leq b_n \leq c_n$, pour tout n

Donc $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = L$

2.5.7 A l'aide du théorème des deux gendarmes, calculer :

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{\cos(n)}{n^2}$ b) $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

pour tout n : $\frac{-1}{n^2} \leq \frac{\cos(n)}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$

Comme $\lim_{n\to\infty} \frac{-1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$, donc $\lim_{n\to\infty} \frac{\cos(n)}{n^2}$

b) pour tout n : $\frac{-1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{-1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$

c) $\frac{-n}{n^2+1} \leq \frac{n \cdot \sin(n!)}{n^2+1} \leq \frac{n}{n^2+1}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}\,1}{\cancel{n}(n+\frac{1}{n})} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+\frac{1}{n}} = 0$

de même $\lim_{n\to\infty} \frac{-n}{n^2+1} = 0$

Donc $\lim_{n\to\infty} \frac{n \sin(n!)}{n^2+1} = 0$

d) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0$ $\qquad [\ 10! = 10 \cdot 9!\ ]$

En effet :

$$\frac{1}{n^n} \leq \frac{n!}{n^n} = \frac{\cancel{n}(n-1)!}{\cancel{n} \cdot n^{n-1}} = \frac{(n-1)!}{n^{n-1}} = \frac{(n-1)(n-2)!}{n \cdot n^{n-2}} \leq \frac{(n-2)!}{n^{n-2}} \leq \dots \leq \frac{1}{n}$$

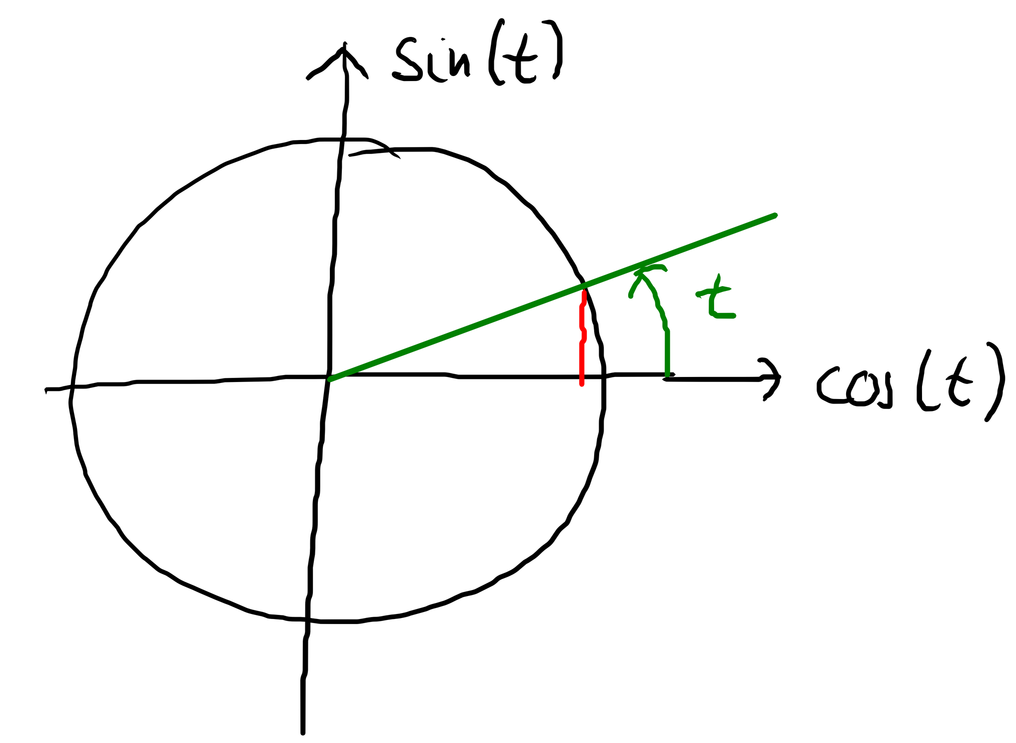
Comme $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{n^n} = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{n} = 0$, alors $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0$

e) $\lim\limits_{n \to \infty} n \cdot \sin\left(\dfrac{1}{n^2}\right) = $ "$\infty \cdot 0$" Forme indéterminée. $\quad$ "$\dfrac{0}{\infty} = 0$" $\quad$ "$\dfrac{\infty}{0} = \infty$"

$$\boxed{\begin{aligned} &\lim_{n \to \infty} \left(n \cdot \frac{1}{n}\right) = 1 \\ &\lim_{n \to \infty} \left(n^2 \cdot \frac{1}{n}\right) = \infty \\ &\lim_{n \to \infty} \left(n \cdot \frac{1}{n^2}\right) = 0 \end{aligned}}$$

Indéterminations les plus courantes

$\dfrac{0}{0} \qquad \dfrac{\infty}{\infty} \qquad \infty \cdot 0 \qquad +\infty - \infty \qquad 0^0$



Si t est petit, avec $t > 0$, alors $\sin(t) < t$.

$$0 \leq n \cdot \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \leq n \cdot \frac{1}{n^2}$$

$$0 \leq n \cdot \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \leq \frac{1}{n}$$

donc $\lim\limits_{n \to \infty} n \sin\left(\dfrac{1}{n^2}\right) = 0$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} E(nx) = x$ avec $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$\frac{1}{n-1} \cdot (n-1)\, x \leq \frac{1}{n} E(nx) \leq \frac{1}{n} \cdot nx$$

$$x \leq \frac{1}{n} E(nx) \leq x$$