31.05.24

4.2.19 La population d'une culture bactérienne double toutes les 12 heures. Supposons que la population initiale est de 10'000 bactéries.

a) Déterminer la relation qui représente la taille de la population N après t heures.

b) Combien y aura-t-il de bactéries après une semaine ?

c) Au bout de combien de temps le nombre de bactéries aura-t-il triplé ?

Temps [h]	# bactéries		
0	10'000	$\times 2$	
12	20'000	$\times 2$	2^1
24	40'000	$\times 2$	2^2
36	80'000		2^3
t	N(t)		

a) $N(t) = \underbrace{10'000}_{\text{Population initiale}} \, 2^{t/12}$ $\qquad t \geq 0$

Modèle exponentielle $\quad N(t) = P_0 \, e^{Kt}$

Déterminons P_0 et :

- $N(0) = 10'000$: $\quad P_0 \, e^{K \cdot 0} = P_0 \cdot 1 = 10'000$
- $N(12) = 20'000$: $\quad 10'000 \, e^{12K} = 20'000$

$$e^{12K} = 2$$
$$\ln\left(e^{12K}\right) = \ln(2)$$
$$12K \underbrace{\ln(e)}_{} = \ln(2)$$
$$12K \cdot 1 = \ln(2)$$
$$K = \frac{\ln(2)}{12}$$

D'où la fonction : $\boxed{N(t) = 10'000 \, e^{\frac{\ln(2)}{12} t}}$

Ces deux fonctions sont égales. En effet :

$$e^{\frac{\ln(2)}{12}} = \left(e^{\ln(2)}\right)^{\frac{1}{12}} = 2^{\frac{1}{12}}$$

b) Combien y aura-t-il de bactéries après une semaine ?

c) Au bout de combien de temps le nombre de bactéries aura-t-il triplé ?

b) $N(168) = 10'000 \; 2^{\frac{168}{12}} = 10'000 \; 2^{14} = 163'840'000$ bactéries

1 semaine $= 168$

c) $N(t) = 30'000 \iff 2^{\frac{t}{12}} = 3$

$$\ln\left(2^{\frac{t}{12}}\right) = \ln(3)$$

$$\frac{t}{12} \cdot \ln(2) = \ln(3)$$

$$t = \frac{12 \ln(3)}{\ln(2)}$$

$$t \cong 19 \quad [\text{heures}]$$

$\rightarrow$ 4, 2, 25

4.2.22 On place un capital C à un taux d'intérêt annuel i pendant une durée de n années et on obtient le montant C_n. Remplir le tableau ci-dessous :

	C	i	n	C_n
a)	4'720.–	3,5%	12 ans	
b)		3,5%	24 ans	5'388.65
c)	9'440.–	3,5%		11'604.17
d)	790.–		72 ans	9'404.43

a) Intérêt : $\dfrac{4'720 \cdot 3{,}5}{100} = 165{,}20$

Posons $i/100 = r$

temps [an]	intérêts	capital
0	0	4720,–
1	165,20	4885,20
2	170,98	5056,18
⋮		
n	I_n	

$= C_0$

$= C_1 = C_0 + \frac{i}{100} C_0 = C_0(1+r)$

$= C_2 = C_1 + r\,C_1 = C_1(1+r)$
$= C_0(1+r)^2$

$$\boxed{C_n = C_0 \left(1 + \frac{i}{100}\right)^n}$$

Exemple $C_0 = 100{,}-$ pendant 10 ans à 1%

$C_{10} = 100 \cdot 1{,}01^{10} \cong 110{,}46$