a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

$\boxed{n=1}$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$

La récurrence est donc ancrée.

$\boxed{n \checkmark \Rightarrow n+1 \checkmark}$

Supposons que le résultat est vrai pour $n \in \mathbb{N}$ et montrons que cela implique qu'il est vrai pour $n+1$ également.

On écrit la somme « en remplaçant n par $n+1$ ».

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1)$$

On isole la somme à laquelle on peut appliquer l'hypothèse de récurrence.

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{n\cdot(n+1)}{2} + n+1$$

Par hypothèse de récurrence

$$= \frac{n\cdot(n+1)}{2} + \frac{2\cdot(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)(n+1+1)}{2}$$

Ce n'est rien d'autre que $\frac{n\cdot(n+1)}{2}$ dans laquelle on a remplacé n par $n+1$.

CQFD