Exercice 1.2.2 b)

b) $3^{2n+2} - 2^{n+1}$ est un mulitple de 7.

① Vérifions que la relation est vraie pour $n = 1$:

$$3^{2+2} - 2^2 = 3^4 - 2^2 = 81 - 4 = 77 = 7 \cdot 11$$

est bien un multiple de 7

② $3^{2n+2} - 2^{n+1}$ est un multiple de 7 $\Rightarrow 3^{2(n+1)+2} - 2^{(n+1)+1}$ $= 3^{2n+4} - 2^{n+2}$ est aussi un multiple de 7

$\exists\, K \in \mathbb{N}^*$ tel que $3^{2n+2} - 2^{n+1} = 7K \Rightarrow 3^{2n+2} = 7K + 2^{n+1}$

$$3^{2n+4} - 2^{n+2} = 3^2 \cdot 3^{2n+2} - 2^{n+2} = 3^2 \cdot (7K + 2^{n+1}) - 2^{n+2}$$

$$= 7 \cdot 9K + 9 \cdot 2^{n+1} - 2^{n+2} = 7 \cdot 9K + 2^{n+1} \underbrace{(9-2)}_{7}$$

$$= 7 \cdot 9K + 7 \cdot 2^{n+1} = 7 \cdot (9K + 2^{n+1})$$ qui est un multiple de 7.

$3^{2(n+1)+2} - 2^{(n+1)+1}$ est un multiple de 7, donc par hypothèse de récurrence, $3^{2n+2} - 2^{n+1}$ est aussi un multiple de 7