Exercice 1.2.2 c)

c) $10^{6n+2} + 10^{3n+1} + 1$ est un multiple de 111.

① vraie pour $n=1$: $10^8 + 10^4 + 1 = 100'010'001 = 111 \cdot 900991$

② $10^{6n+2} + 10^{3n+1} + 1$ est divisible par 111 $\Rightarrow$

$10^{6(n+1)+2} + 10^{3(n+1)+1} + 1$ est aussi divisible par 111

$\exists\, k \in \mathbb{N}^*$ tel que $10^{6n+2} + 10^{3n+1} + 1 = 111k$. Donc

$$10^{6n+2} = 111k - 10^{3n+1} - 1$$

$$10^{6n+8} + 10^{3n+4} + 1 = 10^6 \cdot \underbrace{10^{6n+2}}_{111k - 10^{3n+1} - 1} + 10^{3n+4} + 1 =$$

$$10^6\left(111k - 10^{3n+1} - 1\right) + 10^{3n+4} + 1 = 111 \cdot \underbrace{10^6 \cdot k}_{k'} - 10^{3n+7} - 10^6 + 10^{3n+4} + 1$$

$$= 111 \cdot k' - \underbrace{999'999}_{111 \cdot 9009} - 10^{3n+4}\underbrace{\left(10^3 - 1\right)}_{9 \cdot 111} = 111 \cdot k' - 111\underbrace{\left(9009 + 9 \cdot 10^{3n+4}\right)}_{-k''}$$

$$= 111\left(k' + k''\right)$$ qui est un multiple de 111.

La relation est vraie pour $n+1$. Donc la relation est vraie pour tout n.