Exercice 1.2.5

Calculons $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sum_{j=1}^{k} j} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\frac{k(k+1)}{2}} = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Σ	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{6}{4}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{10}{6}$	$\frac{12}{7}$	$\frac{14}{8}$	$\frac{16}{9}$	$\frac{18}{10}$	$\frac{20}{11}$

Il semble que la somme cherchée soit égale à $\frac{2n}{n+1}$

Montrons ce résultat par récurrence :

① vraie pour $n=1$: 1 et $\frac{2}{1+1} = 1$

② Supposons le résultat vrai pour n et démontrons le pour $n+1$.

En fait, nous nous intéressons à $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$.

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$$

Ce qui montre le résultat

(c'est en fait le résultat de l'exercice 9)