Série 2 – Méthodes numériques – méthode de Newton

Exercice 1

Calculer l'équation de la tangente au graphe $y = f(x)$ au point d'abscisse $x = a$.

a) $f(x) = 1 - x\,e^x$, $a = 0$.

b) $f(x) = x^5 - 2\,x + 1$, $a = -1$.

Exercice 2

Trouver ~~aux dix~~ 10^{-3} millième près la racine de chacune des équations suivantes avec la méthode de Newton en partant du point x_0 donné.

a) $f(x) = x(1 + e^x) - e^x$, $x_0 = 0$.

b) $f(x) = x^5 - x - 1$, $x_0 = 0.9$.

Exercice 1

Si f est une fonction dérivable sur un intervalle contenant a, la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a a pour équation

$$\boxed{y = f(a) + f'(a)(x-a)}$$

En effet :

1) $y = f'(a)x + h$

2) $f(a) = f'(a)\cdot a + h \Rightarrow h = f(a) - f'(a)\cdot a$

2) dans 1) : $y = \underline{f'(a)x} + f(a) \underline{- f'(a)a}$

$y = f(a) + f'(a)(x-a)$

a) $f'(x) = (1 - xe^x)' = -e^x - xe^x = -e^x(1+x)$

$f(0) = 1$, $f'(0) = -1$

tangente : $y = 1 - (x-0) \Rightarrow \underline{y = -x + 1}$

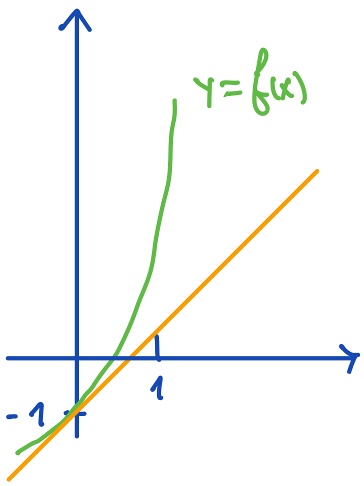
b) $f'(x) = 5x^4 - 2$

$f'(-1) = 5 - 2 = 3 \quad ; \quad f(-1) = -1 + 2 + 1 = 2$

tangente : $y = 2 + 3(x+1) \Rightarrow y = 3x + 5$

Exercice 2

a) $f(x) = x(1+e^x) - e^x \quad ; \quad f'(x) = x e^x + 1$



$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

$$x_1 = 0 - \frac{f(0)}{f'(0)} = 0 - \frac{-1}{1} = 1$$

$$x_2 = 1 - \frac{f(1)}{f'(1)} = 1 - \frac{1}{e+1} \cong 0.7311$$

$$x_3 = 0.7311 - \frac{f(0.7311)}{f'(0.7311)} \cong 0.7311 - \frac{0.1725}{2.5188}$$

$$\cong 0.6626$$

$$x_4 = 0.6626 - \frac{f(0.6626)}{f'(0.6626)} \cong 0.6626 - \frac{0.0081}{2.2853} \cong 0.6591$$

$$x_5 = 0.6591 - \frac{f(0.6591)}{f'(0.6591)} \cong 0.6591 - \frac{0.0001}{2.2741} \cong 0.6591$$

d'où la solution approché : $\underline{r = 0.659}$

b) $f(x) = x^5 - x - 1$

$f'(x) = 5x^4 - 1$

$x_0 = 0.9$

$$x_1 = 0.9 - \frac{f(0.9)}{f'(0.9)} \cong 1.4742$$

$$x_2 = 1.4742 - \frac{f(1.4742)}{f'(1.4742} \cong 1.2757$$

$$x_3 \cong 1.1856$$

$$x_4 \cong 1.1679 \qquad \Rightarrow \qquad \underline{r = 1.167}$$

$$x_5 = 1.1673$$