Gymnase de Burier

Introduction à la théorie des graphes

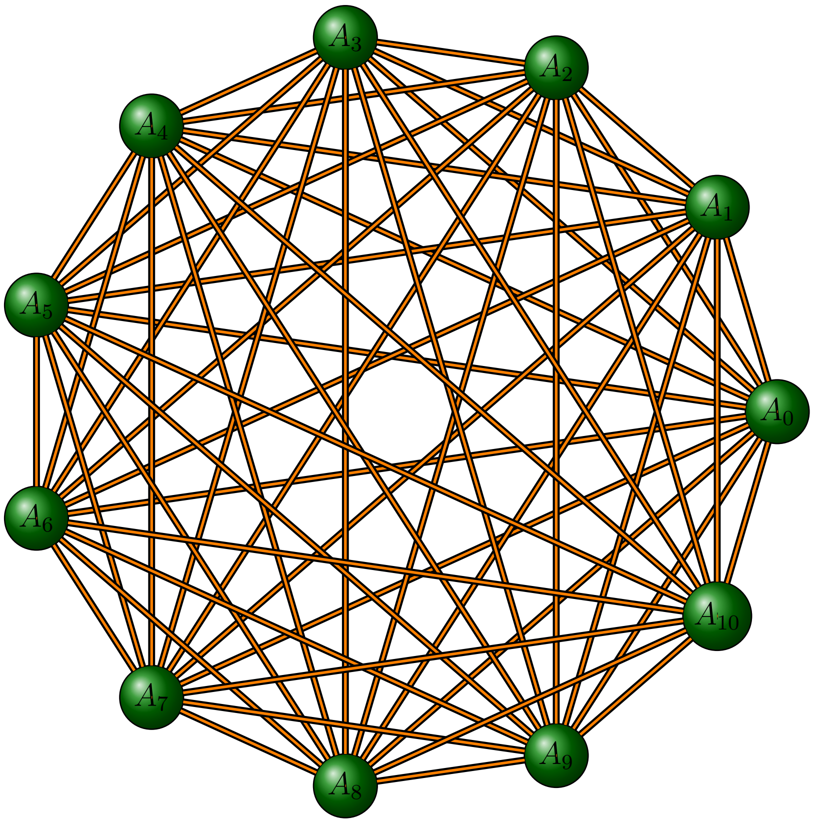


Table des matières

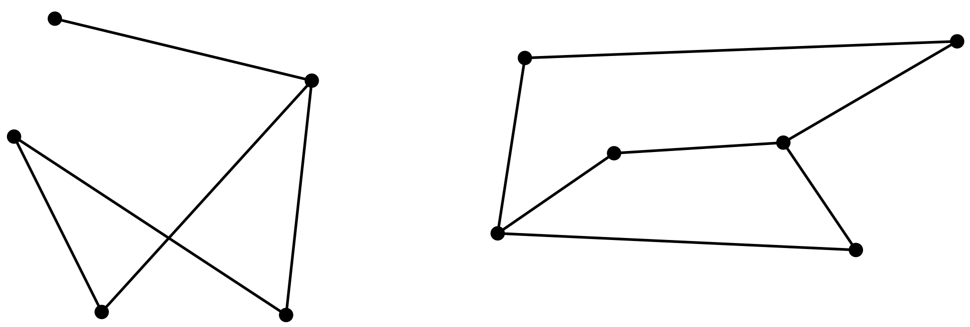
Chapitre 1

Notion de graphe

1.1 Les graphes : définitions et propriétés

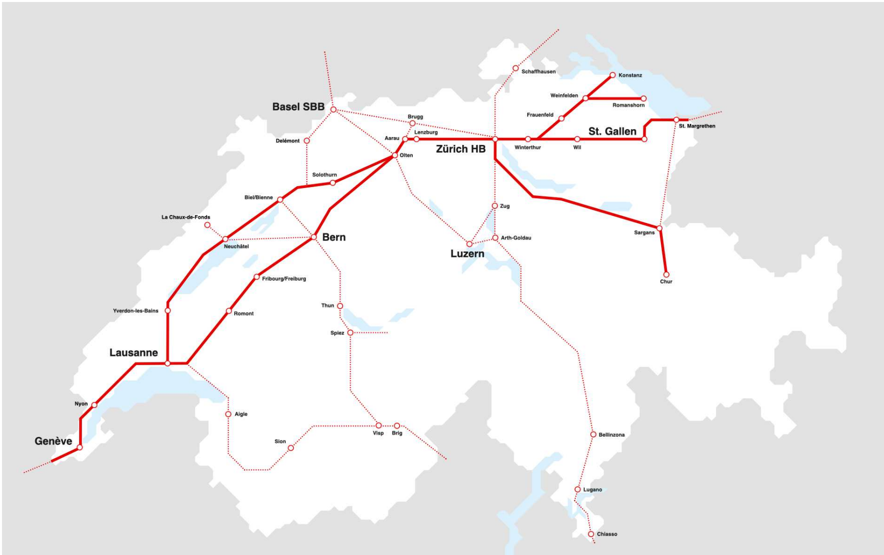
1.1.1 Définitions

Définition 1
Un graphe est un ensemble de points reliés par des segments, comme sur les figures ci-dessous.



Les points sont appelés **sommets** du graphe.
Les segments sont appelés les **arêtes**. Les sommets situés « à chaque bout » sont les extrémités de l'arête.

Exemple 1
L'axe est-ouest vu par les cff.



Définition 2
Un **graphe fini** $G = (V, E)$ est défini par l'ensemble fini $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ dont les éléments sont appelés sommets (Vertices en anglais), et par l'ensemble fini $E = \{e_1, e_2, ..., e_m\}$ dont les éléments sont appelés arêtes (Edges en anglais).

Exemple 2
Le graphe d'un tournoi d'échec $G = (V, E)$ où :

— V est l'ensemble des participants au tournoi,

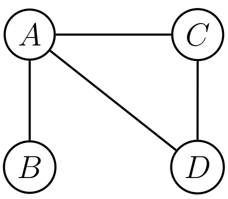
— E est l'ensemble des paires de joueurs se rencontrant dans le tournoi.

Définition 3
Une **arête** e de l'ensemble E est définie par une paire non ordonnée de sommets, appelés les extrémités de e. Si l'arête e relie les sommets a et b, on dira que ces sommets sont **adjacents**, ou incidents avec e, ou bien que l'arête e est incidente avec les sommets a et b.

Définition 4
On appelle **ordre** d'un graphe le nombre de sommets n de ce graphe.

Définition 5
Le **degré** d'un sommet est le nombre d'arêtes dont il est une extrémité.

Exemple 3
Dans ce graphe $G = (V, E)$, on a :



— $V = \{A, B, C, D\}$

— $E = \{\{A, B\}, \{A, C\}, \{A, D\}, \{C, D\}\}$

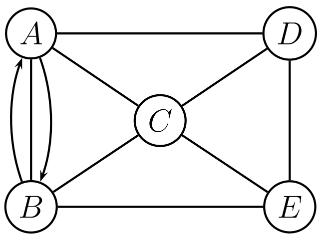
— $\text{ordre}(G) = 4$

— $\text{degré}(C) = 2$

Définition 6
Considérons un graphe non orienté.

— Une **chaîne** est une suite ordonnée de sommets reliés par des arêtes.
— Une **chaîne** est **simple** si elle n'utilise pas plus d'une fois une même arête.
— Une **chaîne** est **fermée** si l'origine et l'extrémité sont confondues.
— Une **chaîne** est **élémentaire** si elle n'utilise pas plus d'une fois un même sommet.
— Un **cycle** est une chaîne fermée simple.

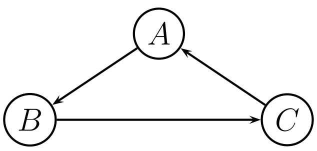
Exemple 4
Sur le graphe suivant :



$ACEC$ est une chaîne qui n'est ni simple, ni élémentaire.
$ABCD$ est une chaîne simple et élémentaire.
$ACEDCB$ est une chaîne simple non élémentaire.
$ACECA$ est une chaîne fermée.
$ABCA$ et $CABCDEC$ et $ABCDECA$ sont des cycles.

Définition 7
Soit **graphe fini** $G = (V, E)$. On dit que graphe est un **graphe orienté** si les arêtes ont une orientation d'un sommet vers un autre sommet.

Exemple 5
Dans ce graphe $G = (V, E)$ orienté, on a :



— $V = \{A, B, C\}$
— $E = \{(A, B), (B, C), (C, A)\}$

Si $x = (A, B)$ est une arête du graphe G, A est le sommet initial de x et B est le sommet final de x.

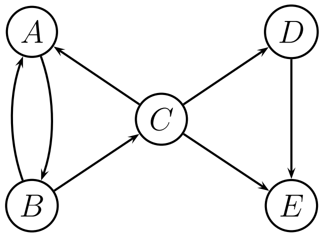
Définition 8
On considère un graphe orienté.

— Un **chemin** est une suite ordonnée de sommets reliés par des arcs.
— Un **chemin** est **simple** s'il n'utilise pas plus d'une fois un même arc.
— Un **chemin** est **fermé** si l'origine et l'extrémité sont confondues.
— Un **chemin** est **élémentaire** s'il n'utilise pas plus d'une fois un même sommet.

— Un **circuit** est une chemin fermé simple (c'est un cycle orienté).

Exemple 6

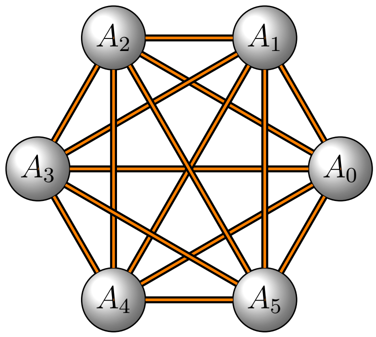
Sur le graphe orienté ci-dessous :



$ABAB$ est un chemin qui n'est ni simple, ni élémentaire.
$BCDE$ est un chemin simple et élémentaire.
$BABCA$ est un chemin simple non élémentaire.
BAB et $ABCA$ sont des cycles.

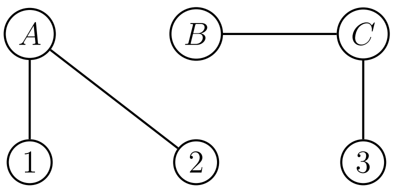
Définition 9

Considérons un graphe non orienté.
Un **graphe** est **complet** si deux sommets quelconques sont adjacents.
Voici une représentation de K_6.



Définition 10

Un **graphe non orienté** est **connexe** si chaque paire de sommets est reliée par une chaîne (on dira qu'un graphe orienté est connexe si le graphe non orienté associé est connexe).
Voici un graphe **non connexe**.

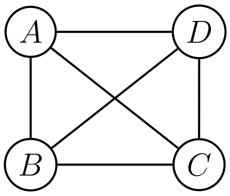


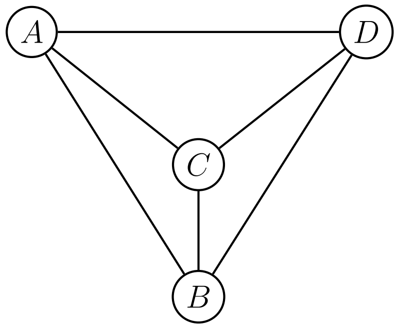
Définition 11

Un **graphe** est **planaire** si on peut le dessiner dans un plan sans que ses arêtes ne se croisent.

Exemple 7

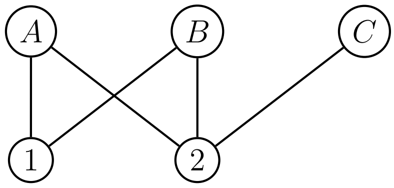
Un graphe **planaire** peut être donné sous une forme qui peut faire penser qu'il ne l'est pas.
Voici deux représentations d'un même graphe complet.





Définition 12

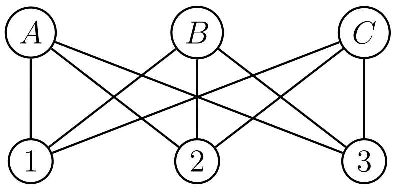
Un **graphe** $G = (V, E)$ est **biparti** s'il existe une partition de ses sommets $V = S_1 \cup S_2$ avec $S_1 \cap S_2 = \varnothing$, telle que chaque arête ait une extrémité dans S_1 et l'autre dans S_2.



$S_1 = \{A, B, C\}$ et $S_2 = \{1, 2\}$.

Définition 13

Un **graphe biparti** $G = (V, E)$ est **complet** si chaque sommet de S_1 est relié à chaque sommet de S_2. On le note $K_{n,m}$, où n est le nombre de sommets de S_1 et m le nombre de sommets de S_2 .



C'est $K_{3,3}$. $S_1 = \{A, B, C\}$ et $S_2 = \{1, 2, 3\}$.

Définition 14

On appelle **face** (non infinie) d'un graphe planaire connexe toute région du plan délimitée par des arêtes, telle que deux points quelconques de cette région peuvent toujours être reliés par une ligne continue qui ne coupe aucune arête.

Définition 15

Une **face infinie** est une face délimitée partiellement par des arêtes.

1.1.2 Graphe eulérien

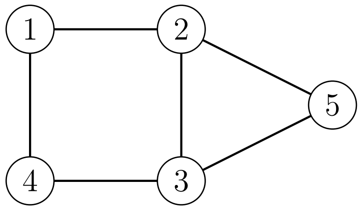
Définition 16

Dans un graphe non orienté, une chaîne est appelée **chaîne eulérienne** si et seulement

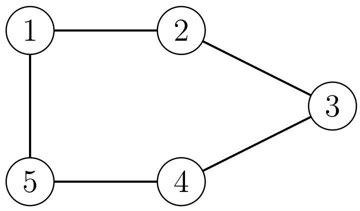
si c'est une chaîne composée de toutes les arêtes du graphe prises chacune une fois et une seule.
On peut donc passer plusieurs fois par le même sommet, mais pas par la même arête.

Définition 17
Un **cycle eulérien** est un cycle qui passe une fois et une seule par chaque arête du graphe.
Un graphe possédant un cycle eulérien est un **graphe eulérien**.
Un graphe eulérien est un graphe que l'on peut dessiner sans jamais lever le crayon et sans passer deux fois par la même arête.

Exemple 8
Dans ce graphe, la chaîne $2-1-4-3-2-5-3$ est une chaîne eulérienne.



Exemple 9
Dans ce graphe, le cycle $1-2-3-4-5-1$ est un cycle eulérien.



1.1.3 Propriétés

Propriété 1
La somme des degrés de tous les sommets d'un graphe est égale à deux fois le nombre d'arêtes :

$$\underbrace{d}_{\text{somme des degrés}} = 2 \cdot \underbrace{a}_{\text{nombre d'arêtes}}$$

La somme des degrés de tous les sommets d'un graphe est toujours un nombre pair.

On peut en déduire la propriété suivante :

Propriété 2
Dans un graphe le nombre de sommets de degré impair est un nombre pair.

Donnons une application un peu inattendue de cette propriété. Dans une réunion où beaucoup de poignées de main sont échangées, le nombre de personnes ayant serré un nombre impair de mains est un nombre pair.

Propriété 3
Soit G un graphe planaire et connexe, s le nombre de sommets, a le nombre d'arêtes et f le nombre de faces. On a la relation :

$$s - a + f = 2$$

Cette relation est connue sous le nom de **formule d'Euler**.

Propriété 4
Un graphe complet est toujours connexe.

Théorème 1 (Théorème d'Euler)

a) Un graphe admet un cycle eulérien si et seulement si il est connexe et n'a aucun sommet de degré impair.
b) Un graphe admet une chaîne eulérienne entre les sommets x et y si et seulement si il est connexe et si x et y sont les deux seuls sommets de degré impair.

Définition 18 (Isomorphisme de graphes)
Soit $G_1 = (E_1, V_1)$ et $G_2 = (E_2, V_2)$ deux graphes. Un isomorphisme de graphe de G_1 dans G_2 est une bijection ϕ de E_1 dans E_2 qui vérifie :

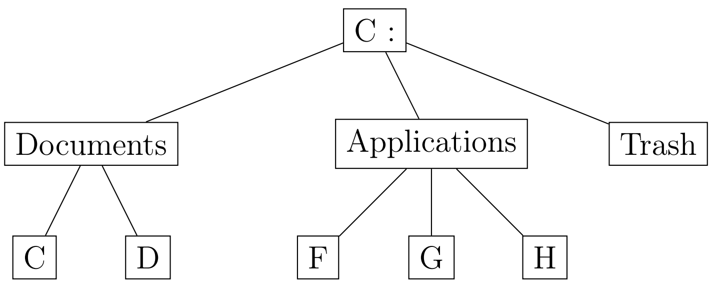
$$(i,\, j) \in V_1 \Leftrightarrow (\phi(i),\, \phi(j)) \in V_2$$

1.1.4 Arbre

Définition 19
Les **arbres** sont des graphes particulièrement importants. Un arbre peut être défini de plusieurs façons équivalentes :

— comme un graphe non orienté connexe sans cycle, ou bien
— comme un graphe non orienté tel que deux sommets distincts sont reliés par un et un seul chemin.

Exemple 10



Hiérarchie des fichiers dans une unité de stockage.

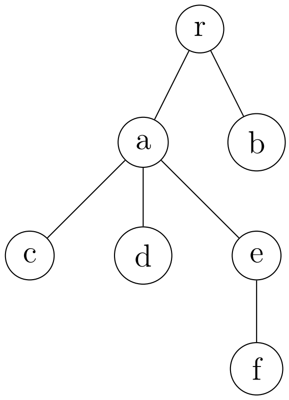
Un arbre est donc un graphe connexe ayant un nombre d'arêtes minimal. Si on enlève une arête on déconnecte le graphe. En tant que support d'un réseau de communication ou de transport, un arbre est donc très fragile.

La moindre « panne » au niveau d'une arête déconnecte le réseau. A l'opposé, un graphe complet fournit un réseau très solide, mais très coûteux à entretenir.

Proposition 1
Dans un arbre, deux sommets quelconques sont connectés par exactement un chemin.

Tout arbre contient un sommet de degré au plus 1 ; de plus, si l'arbre est non-trivial, il doit contenir un sommet de degré exactement 1. Un tel sommet est appelé une feuille de l'arbre.

Proposition 2
Tout arbre non-trivial a au moins deux feuilles.



Définition 20
Un **arbre couvrant** d'un graphe non orienté et connexe est un arbre inclus dans ce graphe et qui connecte tous les sommets du graphe.

Définition 21
Une **forêt** est un graphe non orienté ne contenant pas de cycles.
Les composantes connexes d'une forêt sont donc des arbres.

Chapitre 2

Algorithme

2.1 Arbre couvrant de poids minimum

Soit le graphe $G = (V, E)$ avec un poids associé à chacune de ses arêtes. On veut trouver, dans G, un arbre maximal $A = (V, F)$ de poids total minimum.

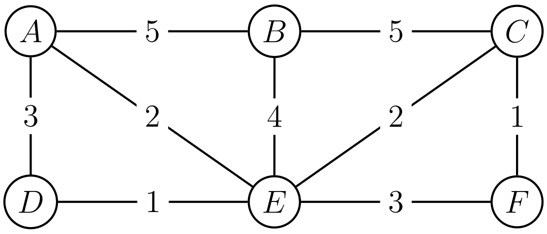
2.1.1 Algorithme de Kruskal (1956)

Soit le graphe $G = (V, E)$, on pose $\text{card}(V) = n$ et $\text{card}(E) = m$.
Pour chaque arête e de E, posons $c(e)$ son poids.
On cherche l'arbre $A = (V, F)$ de poids minimum.
On commence par trier et renuméroter les arêtes de G dans l'ordre croissant de leur poids :

$$c(e_1) \leq c(e_2) \leq \cdots \leq c(e_m)$$

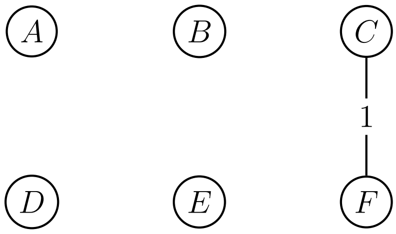
Posons $F = \varnothing$ et $k = 0$.
Tant que $k < m$ et $\text{card}(F) < n - 1$, on ajoute à F e_{k+1}, pour autant que e_{k+1} ne forme pas de cycle avec F.

Exemple 11
Soit le graphe $G = (V, E)$ donné ici.

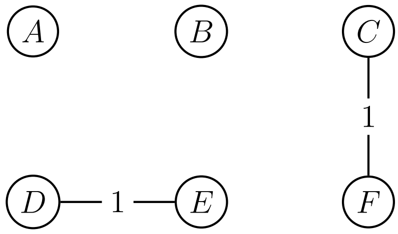


Commençons par trier les sommets par ordre croissant de leur poids :
$\{C, F\} : 1$, $\{D, E\} : 1$, $\{A, E\} : 2$, $\{C, E\} : 2$, $\{A, D\} : 3$, $\{E, F\} : 3$, $\{B, E\} : 4$, $\{A, B\} : 5$, $\{B, C\} : 5$.

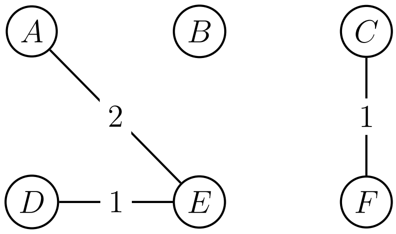
Etape 1



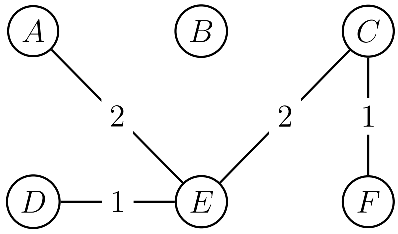
Etape 2



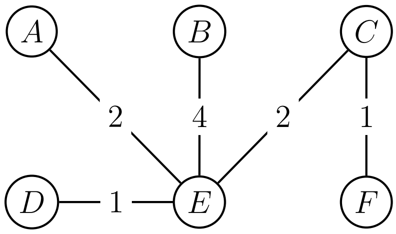
Etape 3



Etape 4



Etape 5

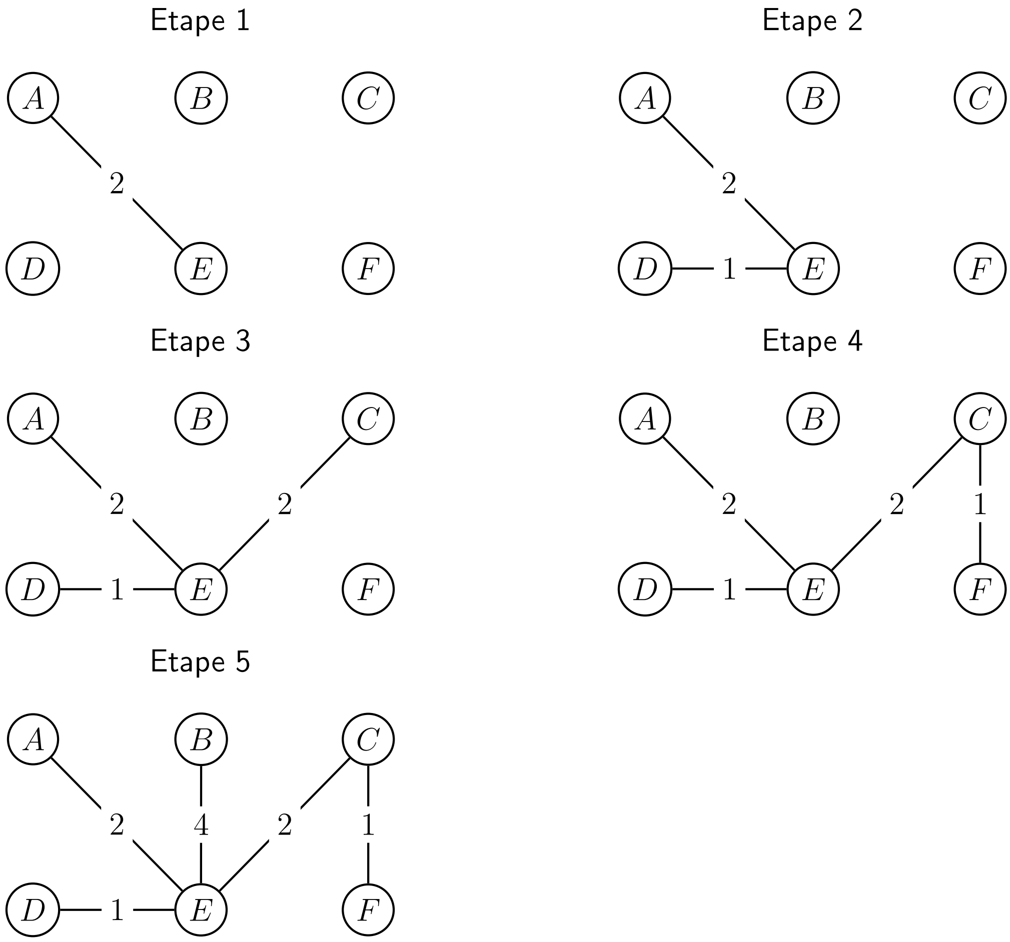


Le poids de cet arbre couvrant est : $1 + 1 + 2 + 2 + 4 = 10$.
$F = \{\{A, E\}, \{B, E\}, \{C, E\}, \{C, F\}, \{D, E\}\}$.
Les arêtes de poids 3 n'ont pas pu être placées, car elles auraient formé un cycle. L'algorithme s'est arrêté dès que cinq arêtes ont été placées. Toute arête supplémentaire aurait créé un cycle.
S'il y a plusieurs arêtes de même poids, il peut y avoir plusieurs arbres couvrants de poids minimum : tout dépend de l'ordre dans lequel ces arêtes ont été triées.

2.1.2 Algorithme de Jarnik (1930) – Prim (1959)

L'algorithme de Prim explore le graphe au départ d'un sommet arbitraire, et construit un arbre à partir de ce sommet en rajoutant à chaque étape l'arête de poids minimum connectant l'arbre en cours de construction à un sommet non visité, jusqu'à ce qu'on ait exploré tous les sommets du graphe.
Les ambiguïtés se résolvent arbitrairement : si plusieurs arêtes de même poids minimum sont disponibles, n'importe laquelle convient.
Reprenons l'exemple précédent. Choisissons le sommet A

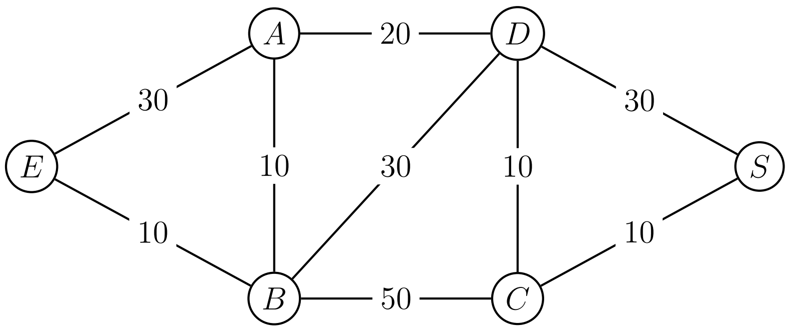
Exemple 12



Le poids de cet arbre couvrant est : $2 + 1 + 2 + 1 + 4 = 10$.
$F = \{\{A, E\}, \{D, E\}, \{E, C\}, \{C, F\}, \{E, B\}\}$.

2.2 Algorithme donnant une plus courte chaîne entre deux sommets

Le graphe G ci-dessous représente un réseau routier reliant six villes notées E, A, B, C, D et S.
Les nombres indiquent la distance entre deux villes, exprimée en kilomètres. Déterminer une plus courte chaîne entre E et S.



On va utiliser un algorithme permettant de trouver une plus courte chaîne.

Initialisation

- On affecte définitivement le poids 0 à E.
- On attribue provisoirement aux sommets adjacents à E le poids des arêtes qui les relient à E.
- On attribue provisoirement aux autres sommets le poids ∞. Dans la suite, $\mathcal{P}$ désignera l'ensemble des sommets dont le poids est définitivement fixé.

Etapes suivantes

Tant que $\mathcal{P}$ ne contient pas tous les sommets et tant que le sommet S qu'on veut atteindre n'est pas affecté du plus petit des poids provisoires, exécuter les actions suivantes :

- Parmi tous les sommets provisoirement pondérés, fixer définitivement le poids de l'un de ceux qui ont un poids minimum : soit X ce sommet.
- Ajouter X à $\mathcal{P}$.
- Pour tout sommet Y n'appartenant pas à $\mathcal{P}$ et adjacent à X, calculer la somme Σ du poids de X et du poids de l'arête reliant X à Y ; si Σ est inférieure ou égale au poids provisoire de Y, affecter Σ à Y comme nouveau poids provisoire, et le noter $\Sigma(X)$ pour marquer la provenance de cette dernière affectation.

On peut représenter toutes les étapes de l'algorithme, exécuté sur cet exemple, par un tableau où les éléments successifs de $\mathcal{P}$ figurent à droite (il n'est pas toujours nécessaire d'écrire la colonne $\mathcal{P}$).
La dernière colonne représente le sommet dont le poids est fixé. $40(A)^\star$ et $40(B)^{\star\star}$ représentent les deux choix possibles

E	A	B	C	D	S	$\mathcal{P}$	
0	$30(E)$	$10(E)$	∞	∞	∞	E	E
	$20(B)$	$10(E)$	$60(B)$	$40(B)^{\star\star}$	∞	E, B	B
	$20(B)$			$40(A)^\star$	∞	E, B, A	A
$40(A)^\star$			$50(D)$	$40(A)^\star$	$70(D)$	E, B, A, D	D
			$50(D)$		$60(C)$	E, B, A, D, C	C
					$60(C)$	E, B, A, D, C, S	S
$40(B)^{\star\star}$			$50(D)$	$40(B)^{\star\star}$	$70(D)$	E, B, A, D	D
			$50(D)$		$60(C)$	E, B, A, D, C	C
					$60(C)$	E, B, A, D, C, S	S

Les étoiles $(^\star)$ et $(^{\star\star})$ permettent de distinguer les deux choix et de retrouver la provenance des sommets.
Les deux chaînes les plus courtes ont un poids égal à 60.
Pour trouver ces deux chaînes, on écrit la liste des sommets de droite à gauche à partir de la colonne S : on remonte les cases coloriées en utilisant la lettre en gras entre parenthèses.
En partant de la droite du tableau, elles peuvent se lire : $S\ C\ D\ A\ B\ E$ et $S\ C\ D\ B\ E$.

Pour la chaîne $S\ C\ D\ A\ B\ E$ (choix n$^\text{o}$ 1).

- dans la colonne S, on repère le sommet C écrit dans la case coloriée ;
- dans la colonne C, on repère le sommet D écrit dans la case coloriée ;
- dans la colonne D, on repère le sommet A écrit dans la case coloriée ;
- dans la colonne A, on repère le sommet B écrit dans la case coloriée ;
- dans la colonne B, on repère le sommet E écrit dans la case coloriée.

Le sommet S a un poids égal à 60 venant de C. Le sommet C est pondéré à partir de D, D est pondéré à partir de A, A est pondéré à partir de B et B est pondéré à partir de E.

Pour la chaîne $S\ C\ D\ B\ E$ (choix n° 2).

- dans la colonne S, on repère le sommet C écrit dans la case coloriée ;
- dans la colonne C, on repère le sommet D écrit dans la case coloriée ;
- dans la colonne D, on repère le sommet B écrit dans la case coloriée ;
- dans la colonne B, on repère le sommet E écrit dans la case coloriée.

Le sommet S a un poids égal à 60 venant de C. Le sommet C est pondéré à partir de D, D est pondéré à partir de B et B est pondéré à partir de E.

En partant de E, les deux chaînes peuvent se lire $E\ B\ A\ D\ C\ S$ et $E\ B\ D\ C\ S$.

Conclusion

Les deux chaînes les plus courtes, lues de l'entrée E à la sortie S, sont : $E\ B\ A\ D\ C\ S$ et $E\ B\ D\ C\ S$.
Elles ont toutes les deux un poids minimum égal à 60.

Cet algorithme de la plus courte chaîne est l'algorithme de **Dijkstra**. Edsger Wybe Dijkstra est un mathématicien et informaticien néerlandais (1903-2002).
L'algorithme qui porte son nom a été publié en 1959.

Chapitre 3

Exercices

3.1 Généralités

3.1.1 Voici le plan des bus de notre région.

a) Ce plan est-il un graphe ?

b) Que représentent les sommets ?

c) Que représentent les arêtes ?

d) Ce graphe est-il connexe ?

e) Ce graphe est-il simple ou orienté ?

f) Quel est le degré du sommet `Gilamont` ? du sommet `Vevey Gare` ?

3.1.2 Dessiner un graphe représentant les amitiés suivantes parmi quatre personnes :

— John est ami avec Joan and Jill, mais pas avec Jack ;

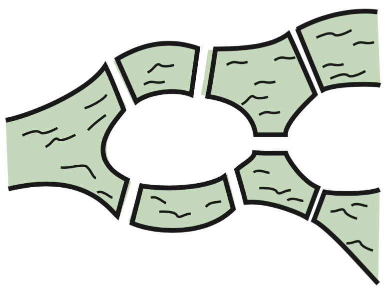
— Jack est ami avec Jill, mais pas avec Joan ;

— Joan est amie avec Jill.

3.1.3 Dessiner le graphe suivant : les sommets sont les faces d'un cube, deux sommets sont reliés si les faces correspondantes ont une arête du cube en commun.

3.1.4 On a six wagons à trier. Dans la gare de triage, les wagons entrent dans l'ordre 2, 5, 3, 6, 1, 4 et doivent sortir dans l'ordre croissant.
Deux wagons `i` et `j` peuvent être mis sur la même voie si et seulement s'ils entrent dans l'ordre dans lequel ils doivent sortir.
Dessiner un graphe illustrant la situation, en indiquant ce que représentent les sommets et les arêtes de votre graphe.
Quel sera le nombre minimal de voies nécessaires au tri ?

3.1.5 (Les sept ponts de Königsberg)
Au XVIIIe siècle les habitants de Königsberg aimaient se promener le dimanche et traverser les différents ponts de leur ville. Ils se demandaient s'il leur était possible de parcourir la ville en empruntant chacun des 7 ponts une fois et une seule.



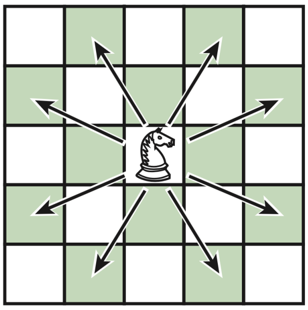
Un promeneur veut traverser, une fois et une seule, chacun des sept ponts de la ville.

a) Peut-il trouver un itinéraire tel que la région d'arrivée soit la même que celle de départ ?

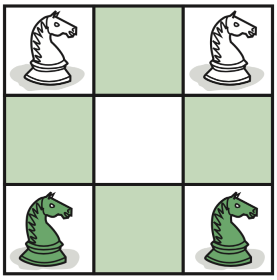
b) Peut-il trouver un itinéraire tel que les régions d'arrivée et de départ soient distinctes ?

3.1.6 (Cavaliers sur un échiquier 3 x 3)
Dans le jeu d'échecs la pièce dont le déplacement est le plus compliqué est le cavalier. Les possibilités de déplacement d'un cavalier sur un échiquier sont indiquées sur la figure

ci-dessous.



On considère maintenant le mini échiquier 3 x 3 de la figure ci-dessous où sont placés deux cavaliers blancs et deux cavaliers en couleur.



Est-il possible de permuter les deux cavaliers blancs et les deux cavaliers en couleur ?

3.1.7 Démontrer le **théorème des poignées de main** : La somme des degrés des sommets d'un graphe est égale à deux fois le nombre d'arêtes.

3.1.8 Est-il possible de relier 15 ordinateurs de sorte que chaque appareil soit relié avec exactement trois autres ?

3.1.9 Montrer que dans un groupe formé de six personnes, il y en a nécessairement trois qui se connaissent mutuellement ou trois qui ne se connaissent pas (on suppose que si A connaît B, B connaît également A).
Montrer que cela n'est plus nécessairement vrai dans un groupe de cinq personnes.

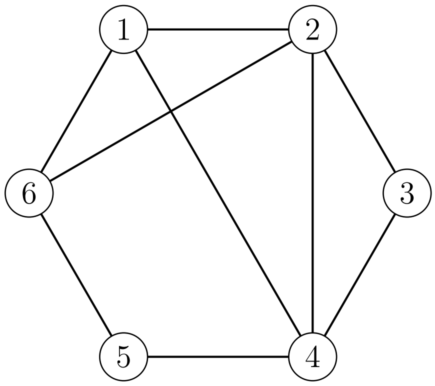
3.1.10

a) Quel est l'ordre du graphe ci-dessous ?

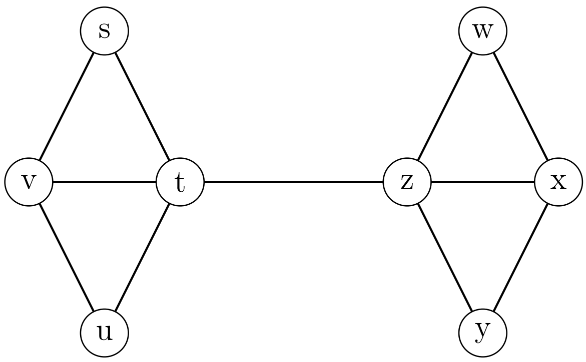
b) Quel est le degré du sommet 1 ? du sommet 4 ?

c) Quels sont les sommets adjacents au sommet 2 ? au sommet 6 ?

d) Il y a deux sommets adjacents chacun à quatre autres sommets. Lesquels ?



3.1.11 Écrire tous les chemins reliant s à y sur le graphe donné ci-dessous. Donner la longueur des chemins trouvés.



Rappel : un chemin est une chaîne telle que chaque arête de celle-ci soit parcourue une et une seule fois.

3.1.12 Dessiner :

a) un graphe connexe avec 8 sommets ;

b) un graphe non connexe avec 8 sommets et deux composantes ;

c) un graphe non connexe avec 8 sommets et trois composantes.

3.1.13

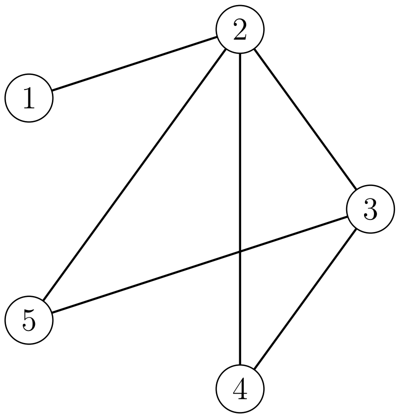
a) Le graphe G ci-dessous est-il complet ?

b) Est-il connexe ?

c) Trouver tous les sous-graphes complets de G (donner la liste de leurs sommets) ?

d) Trouver un chemin de longueur 4 pour aller du sommet 1 au sommet 5 sans passer deux fois par le même sommet.

e) Peut-on trouver un cycle comprenant le sommet 1 ?

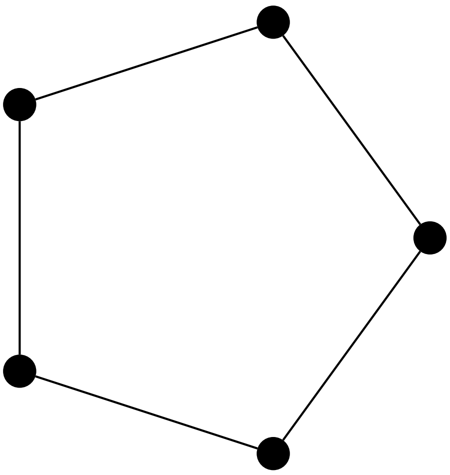


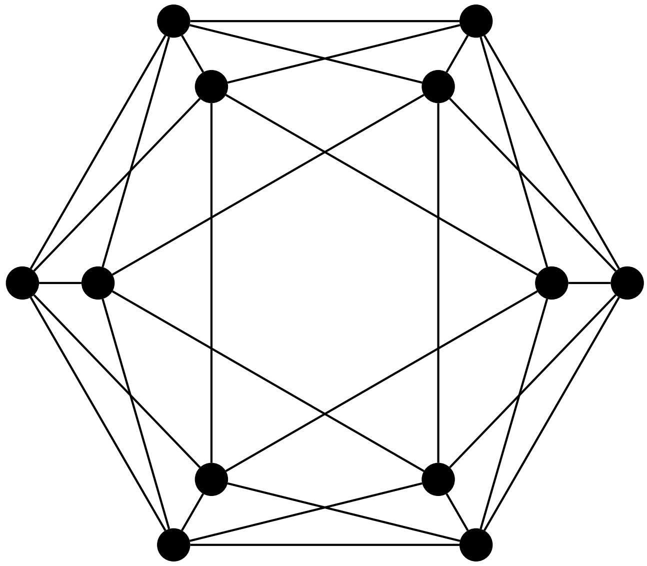
3.1.14 Construire un graphe dont la suite des degrés est (1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 5).

3.1.15 Construire un graphe **connexe** dont la suite des degrés est (1, 1, 2, 3, 3, 4, 4, 6).

3.1.16 Construire un graphe **connexe** dont la suite des degrés est (1, 1, 1, 2, 2, 2, 4, 5, 5).

3.1.17 Soit G un graphe. On dit que G est r-régulier si chaque sommet de G est de degré r. On a le résultat suivant : Si G est r-régulier et qu'il a n sommets, alors G a $n \cdot r/2$ arêtes.
Vérifier ce résultat sur les graphes réguliers suivants :





3.1.18

a) Prouver qu'il n'y a pas de graphe 3-régulier à sept sommets.
b) Prouver que, si n et r sont les deux impairs, il n'y a pas de graphe r-régulier avec n sommets.

3.1.19 Dessiner les 11 graphes simples non étiquetés d'ordre 4.

3.1.20 Dessiner tous les graphes simples non étiquetés d'ordre 5. Il y en a 34.

3.1.21 Notons C_5 le graphe cyclique d'ordre 5 et $\overline{C}_5$ son complémentaire. Montrer que

$$C_5 \simeq \overline{C}_5$$

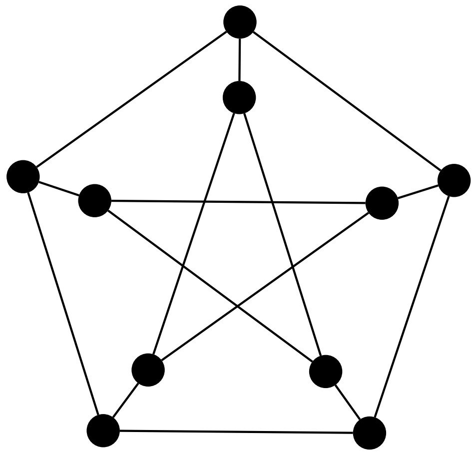
ou, autrement dit, que ces deux graphes sont isomorphes. Montrer ensuite qu'il n'y a pas d'autre graphe cyclique isomorphe à son complémentaire.

3.1.22 Soit G un graphe à ν sommets. Montrer que si $G \simeq \overline{G}$ alors ν ou $\nu - 1$ est un multiple de 4.

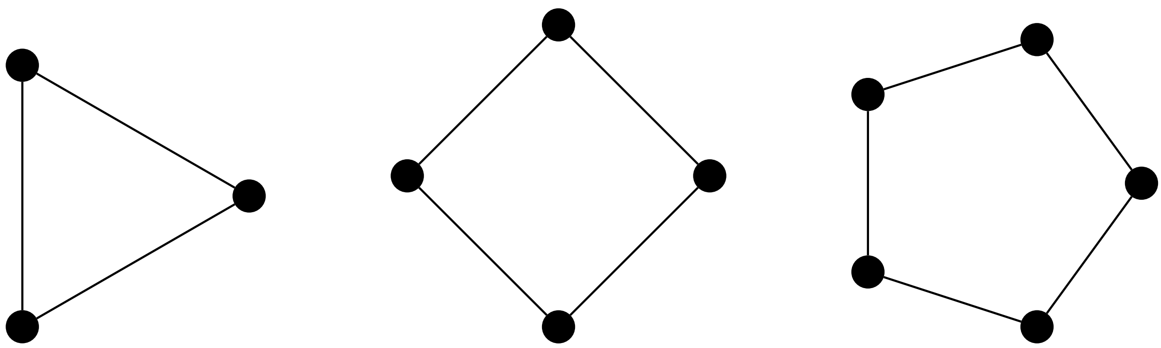
3.1.23 Vu qu'il y a un nombre impair de graphes à quatre sommets, l'un d'entre eux doit être « auto-complémentaire », c'est à dire isomorphe à son complémentaire. Duquel s'agit-il ?

3.2 Graphes eulériens

3.2.1 Soit le graphe de Petersen représenté ci-dessous.

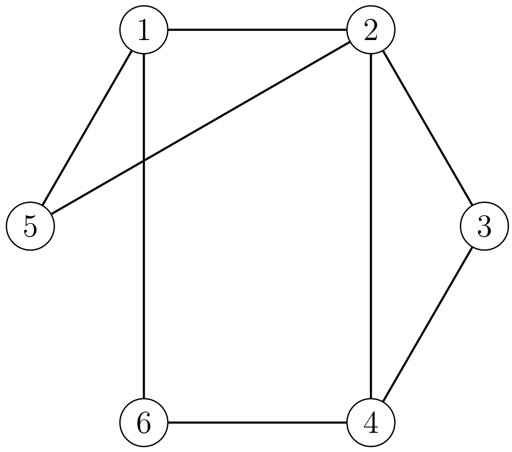


Parmi les graphes représentés ci-dessous, quels sont ceux qui sont un sous-graphe du graphe de Petersen ?



Le graphe de Petersen (1839-1910, mathématicien danois) est, en théorie des graphes, un graphe particulier possédant 10 sommets et 15 arêtes. Il s'agit d'un petit graphe qui sert d'exemple et de contre-exemple pour plusieurs problèmes de la théorie des graphes (Wikipédia).

3.2.2 Soit le graphe ci-dessous.



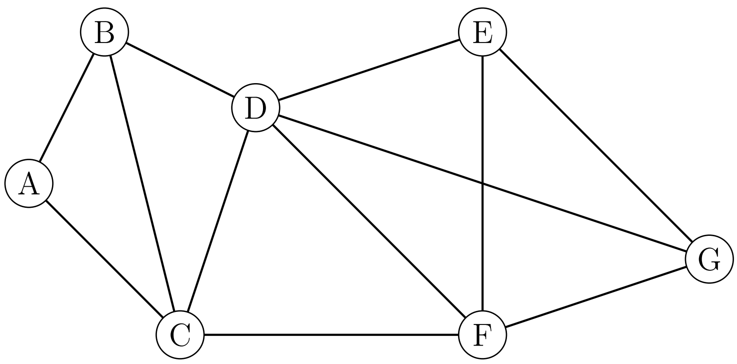
a) Pourquoi le graphe ci-dessus n'admet-il pas de cycle eulérien ?

b) Pourquoi le cycle $1-2-4-3-2-5-1-6$ n'est-il pas une chaîne eulérienne pour ce graphe ?

c) Trouver une chaîne eulérienne d'origine 4.

d) On ajoute une arête de 1 à 4. Montrer qu'il est alors possible de trouver un cycle eulérien.

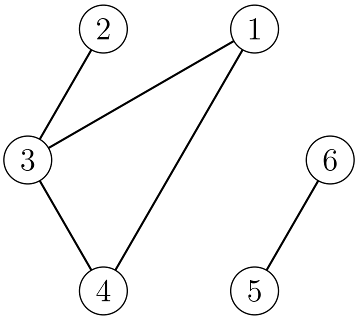
3.2.3 Soit le graphe ci-dessous.

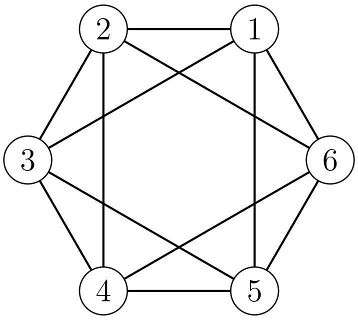


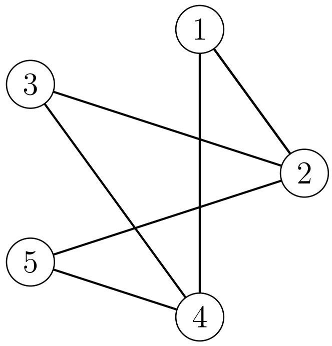
a) Ce graphe admet-il une chaîne eulérienne ? Justifier la réponse. Si oui donner une telle chaîne.

b) Ce graphe admet-il un cycle eulérien ? Justifier la réponse. Si oui donner un tel cycle.

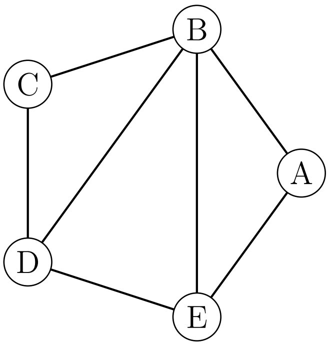
3.2.4 Les graphes ci-dessous sont-ils eulériens (ou semi-eulériens) ?

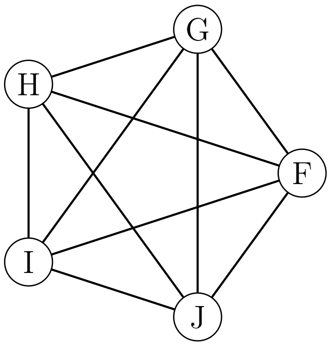


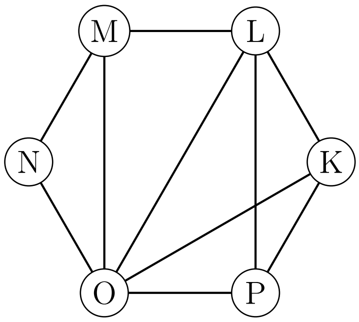




3.2.5 Les graphes ci-dessous admettent-ils un cycle eulérien ou une chaîne eulérienne ?

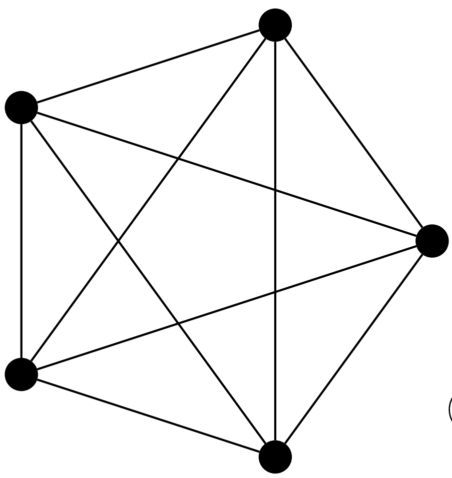
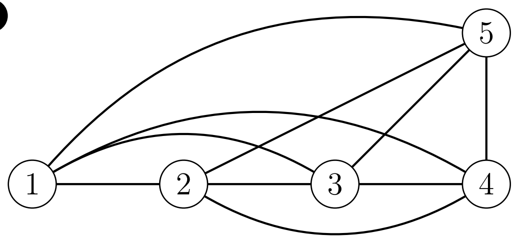




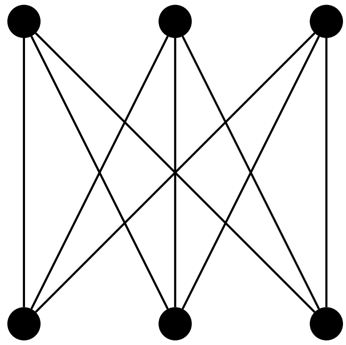


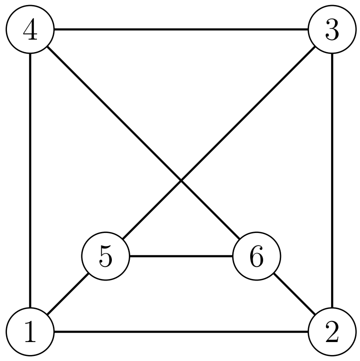
3.2.6 Une chèvre, un chou et un loup se trouvent sur la rive d'un fleuve ; un passeur souhaite les transporter sur l'autre rive mais, sa barque étant trop petite, il ne peut transporter qu'un seul d'entre eux à la fois. Comment doit-il procéder afin de ne jamais laisser ensemble et sans surveillance le loup et la chèvre, ainsi que la chèvre et le chou ?

3.2.7 Montrer que les deux graphes représentés ci-dessous sont isomorphes.

3.2.8 Montrer que les deux graphes représentés ci-dessous sont isomorphes.





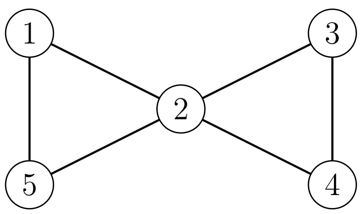
3.3 Arbres

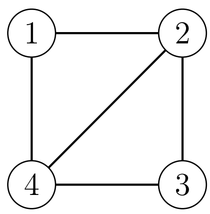
3.3.1 Dessiner tous arbres non étiquetés à 6 sommets ou moins.

3.3.2 En ajoutant à chaque arbre à 6 sommets une arête à la fois, et ceci de toutes les façons possibles, dessiner les 11 arbres à 7 sommets.

3.3.3 En ajoutant à chaque arbre à 7 sommets une arête à la fois, et ceci de toutes les façons possibles, dessiner les 23 arbres à 8 sommets.

3.3.4 On considère les deux graphes ci-dessous :





Pour chaque graphe

a) dessiner tous les arbres couvrants étiquetés ;

b) indiquer ceux qui sont isomorphes.

3.3.5 Trouver tous les arbres couvrants non isomorphes de $K_{3,3}$.

3.3.6 Une *forêt* est un graphe non forcément connexe dont chacune des composantes connexes est un arbre.

a) Soit G une forêt à n sommets et k composantes connexes. Donner le nombre d'arêtes de G.

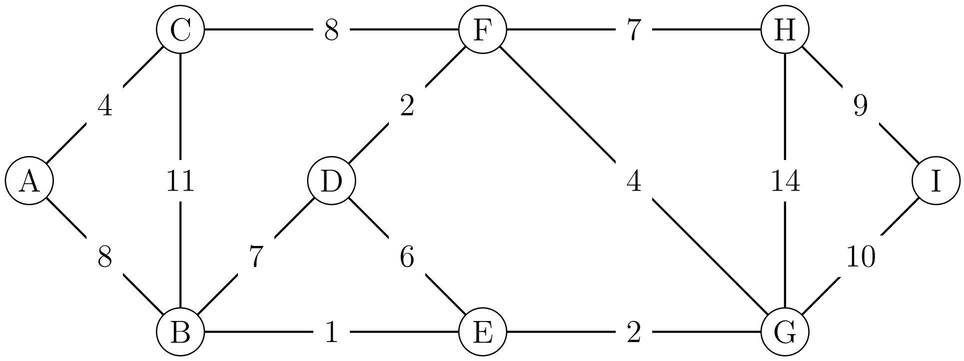
b) Construire une forêt à 12 sommets et 9 arêtes.

c) Est-il vrai que toute forêt à k composantes connexes a au moins $2k$ sommets de degré 1 ?

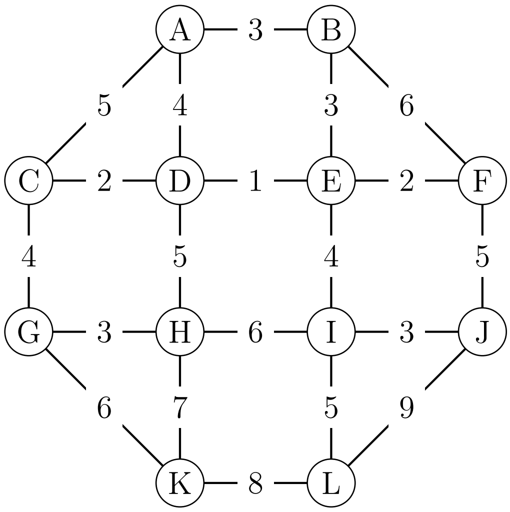
3.3.7 Par l'absurde, démontrer que la suppression d'une arête d'un arbre ne peut le déconnecter en plus de deux composantes connexes.

3.3.8 Par l'absurde, démontrer que l'ajout d'une arête à un arbre ne peut créer plus d'un cycle.

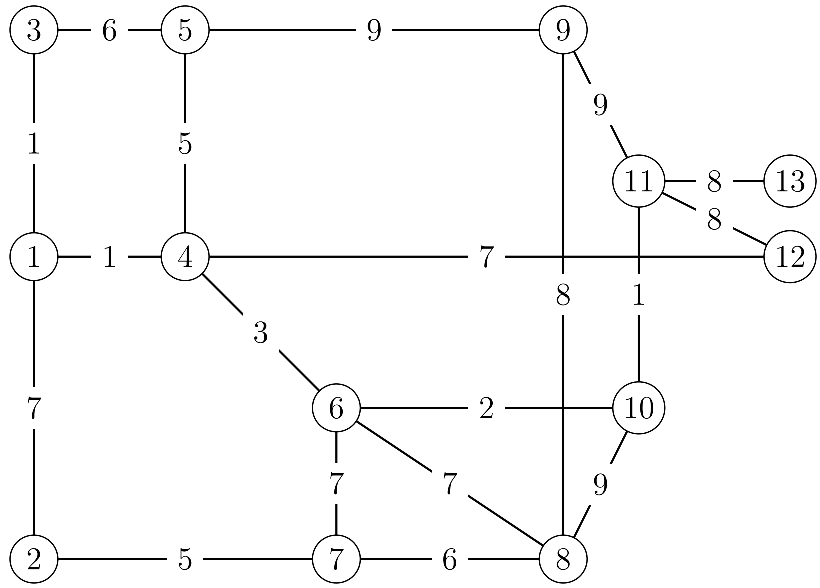
3.3.9 Pour le graphe pondéré ci-dessous, trouver un arbre couvrant de poids minimum.



3.3.10 Pour le graphe pondéré ci-dessous, trouver un arbre couvrant de poids minimum.



3.3.11 Considérons le graphe G ci-dessous.

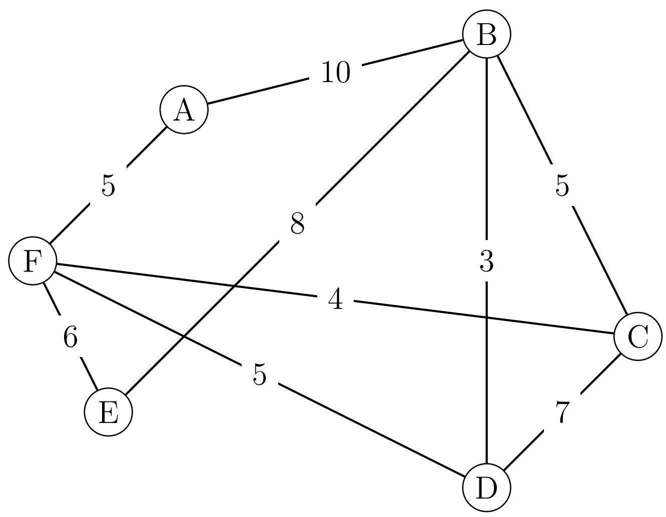


a) Déterminer un arbre de poids minimal de G à l'aide de l'algorithme de Kruskal.

b) Déterminer un arbre de poids minimal de G à l'aide de l'algorithme de Prim, en partant du sommet initial ①.

3.4 Graphes valués : le chemin le plus court

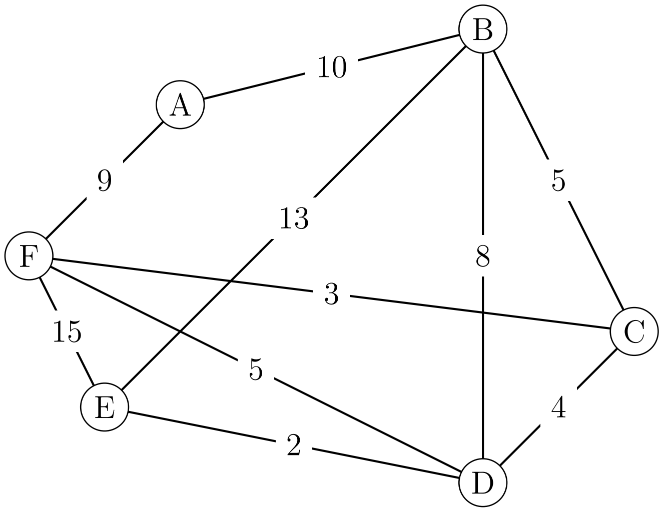
3.4.1 Soit le graphe ci-dessous.



a) Quelle est la longueur du chemin $A - B - C - F - E$?

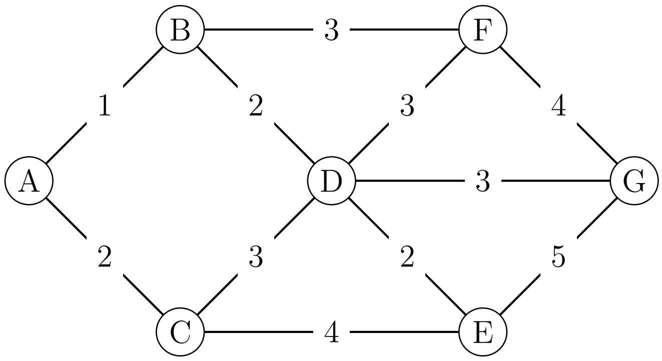
b) Déterminer le chemin de poids minimal reliant F à B.

3.4.2 Soit le graphe ci-dessous.



Déterminer le chemin de poids minimal reliant A à E.

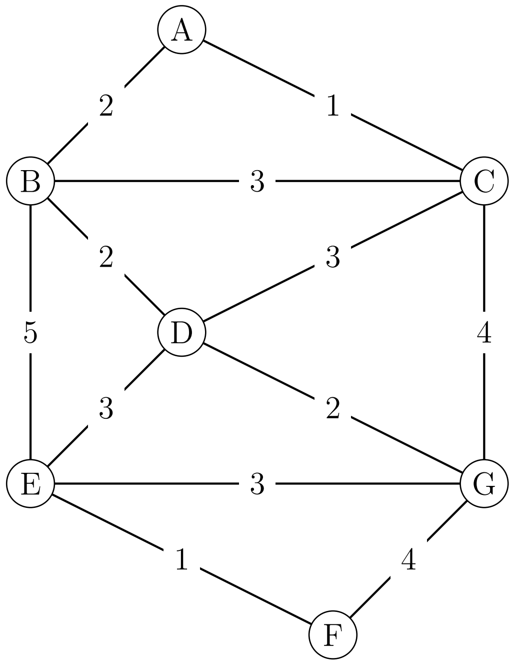
3.4.3 Soit le graphe ci-dessous.



Utiliser l'algorithme de Dijkstra pour déterminer le plus court chemin entre A et G.

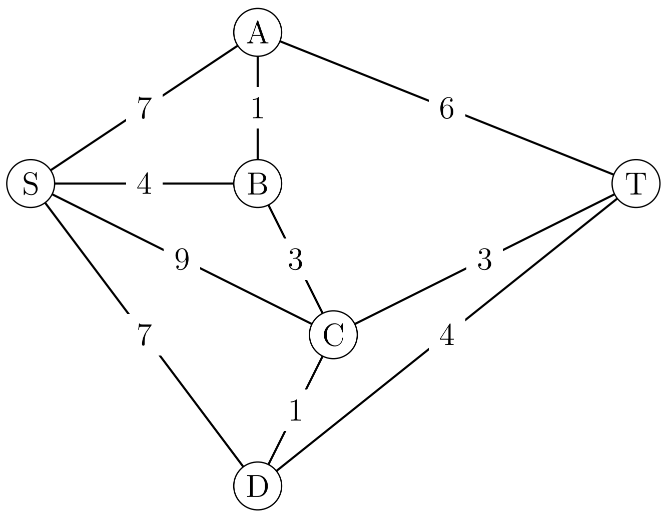
3.4.4 Le graphe présente un réseau routier entre différents points d'une ville.

Chaque tronçon est pondéré par le temps nécessaire, en minute, pour le parcourir.



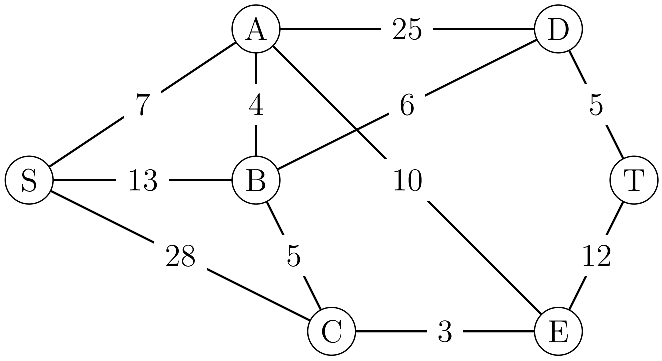
Utiliser l'algorithme de Dijkstra pour déterminer le(s) chemin(s) qui minimise(nt) le temps pour aller de A à F.

3.4.5 Soit le graphe ci-dessous :



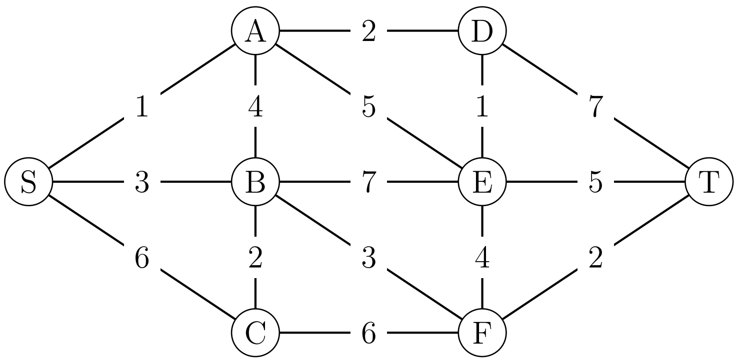
À l'aide de l'algorithme de Dijkstra, trouver le chemin le plus court qui mène de S à T.

3.4.6 Soit le graphe ci-dessous :



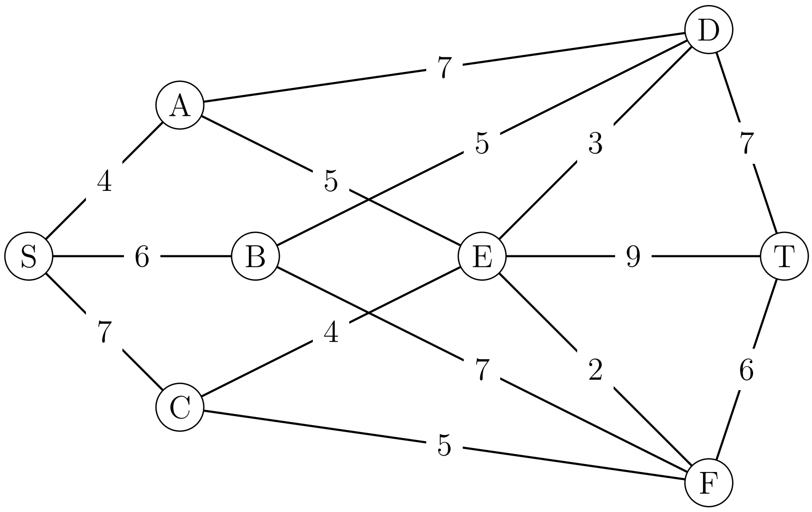
À l'aide de l'algorithme de Dijkstra, trouver le chemin le plus court qui mène de S à T.

3.4.7 Soit le graphe ci-dessous :



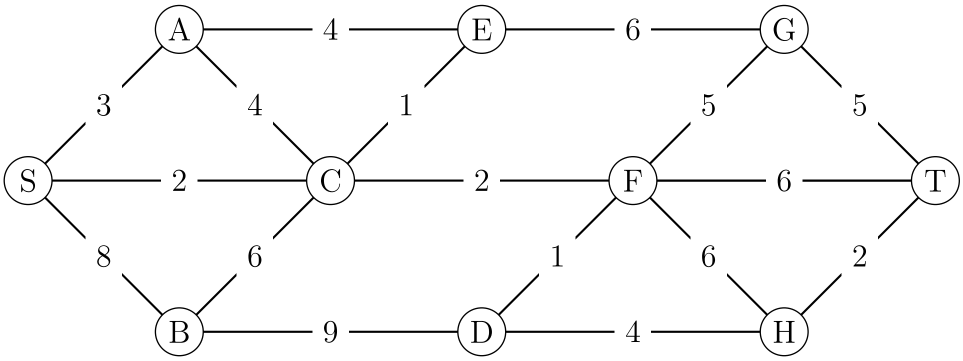
À l'aide de l'algorithme de Dijkstra, trouver le chemin le plus court qui mène de S à T.

3.4.8 Soit le graphe ci-dessous :



À l'aide de l'algorithme de Dijkstra, trouver le chemin le plus court qui mène de S à T.

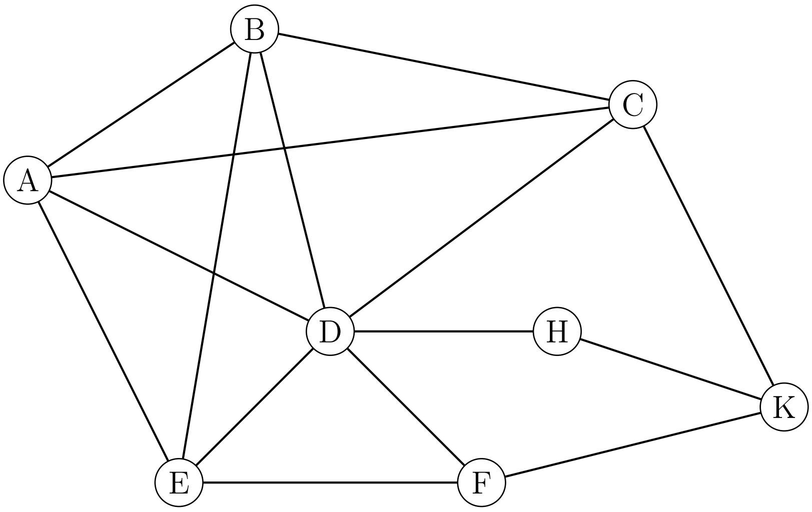
3.4.9 Soit le graphe ci-dessous :



À l'aide de l'algorithme de Dijkstra, trouver le chemin le plus court qui mène de S à T.

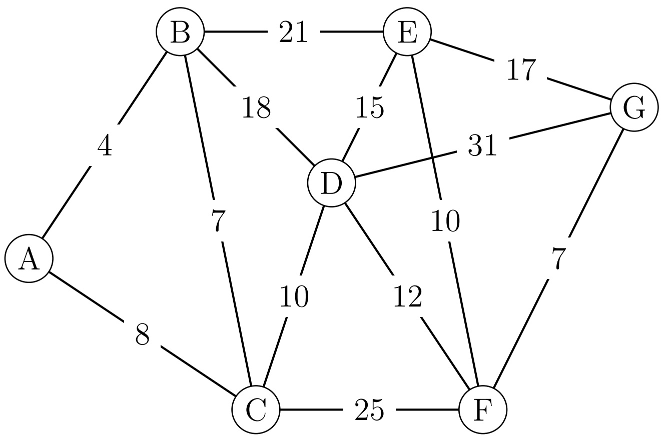
3.4.10 Le graphe ci-dessous représente le plan d'un zoo. Le sommet A désigne son accès, les autres sommets désignent les différents secteurs animaliers de ce zoo.
Une arête représente l'allée reliant deux secteurs et est pondérée par la distance de parcours, exprimée en mètres, entre ces deux secteurs. Les distances sont données dans un tableau.

AB	AC	AD	AE	BC	BD	BE	CD	CK	DE	DF	DH	EF	FK	HK
90	290	175	150	185	155	180	120	260	110	105	220	135	230	145



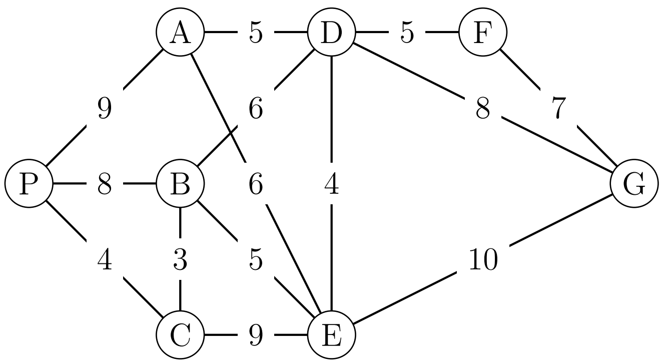
Les services de sécurité basés au sommet A doivent intervenir dans le secteur K. Déterminer, à l'aide de l'algorithme de Dijkstra, l'itinéraire le plus court. Donner sa longueur en mètres.

3.4.11 Une région est munie d'un réseau de train représenté par le graphe ci-dessous. Les stations sont symbolisées par les sommets A, B, C, D, E, F et G. Chaque arête représente une ligne reliant deux gares. Le temps de parcours en minutes entre chaque sommet ont été rajoutés sur le graphe.



Déterminer, en minutes, le plus court chemin reliant la gare B à la gare G.

3.4.12 Un réseau de navettes gratuites est mis en place entre des parkings situés aux abords de la ville et les principaux sites de la ville.
Le graphe ci-contre indique les voies et les temps des liaisons, en minutes, entre ces différents sites.

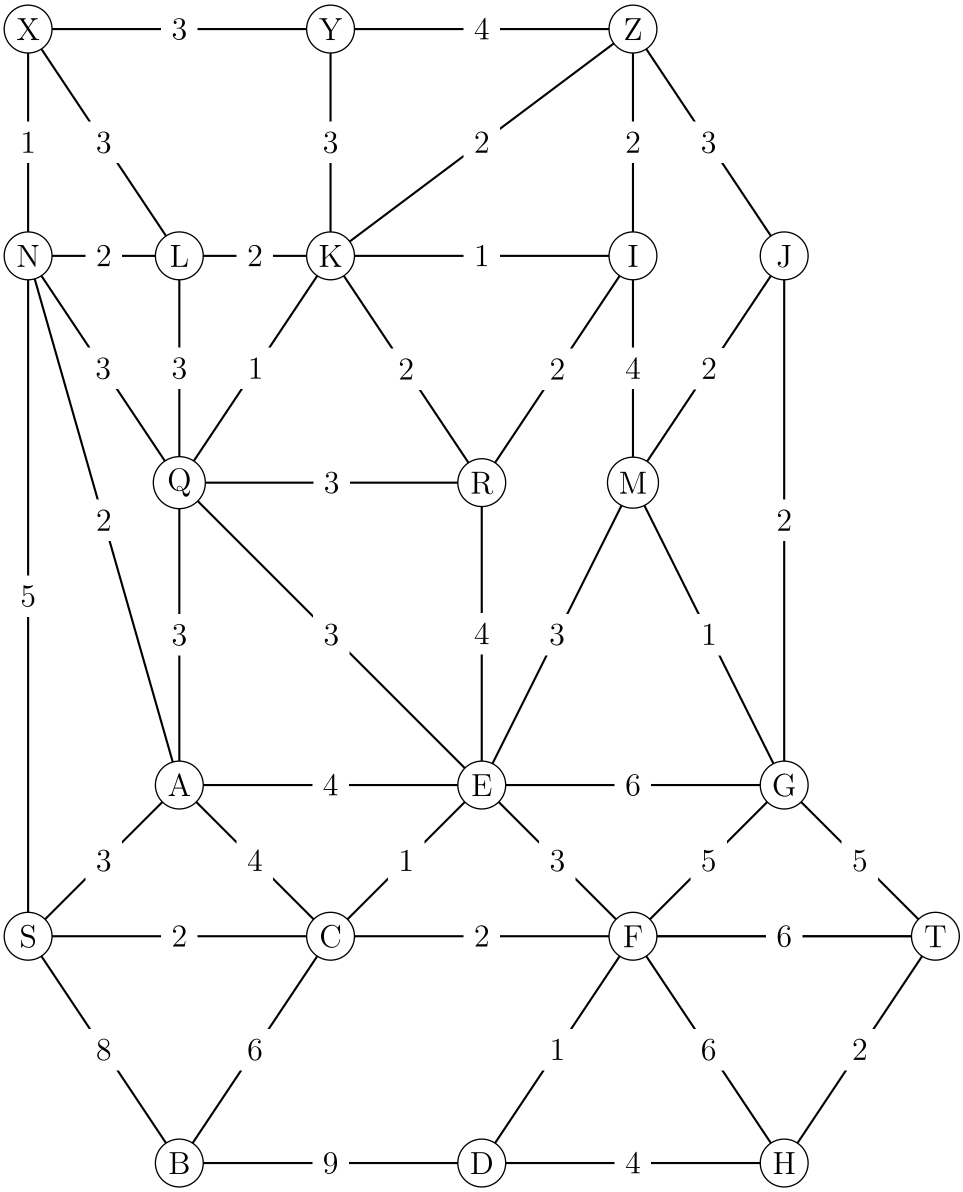


a) Peut-on envisager un itinéraire qui relierait le parking P à la gare G en desservant une et une seule fois tous les sites ?

b) Peut-on envisager un itinéraire qui emprunterait une et une seule fois toutes les voies ?

c) Déterminer un trajet de durée minimale pour se rendre du parking P à la gare G.

3.4.13 Soit le graphe ci-dessous :



À l'aide de l'algorithme de Dijkstra, trouver le chemin le plus court qui mène de X à H.

3.5 Solutions des exercices

3.1.1 a) oui.

b) Un sommet représente une station (ou arrêt) de bus.

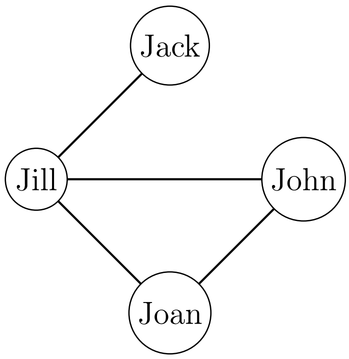
c) Une arêtes représente la route reliant deux stations consécutives.

d) Oui, on peut aller de toute station A (un sommet) à toute station B (un autre sommet).

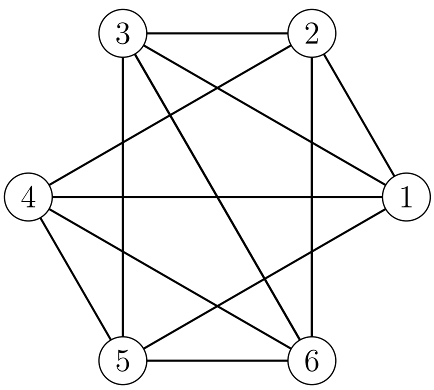
e) Orienté (cf ligne 202 par exemple).

f) 2 et 7.

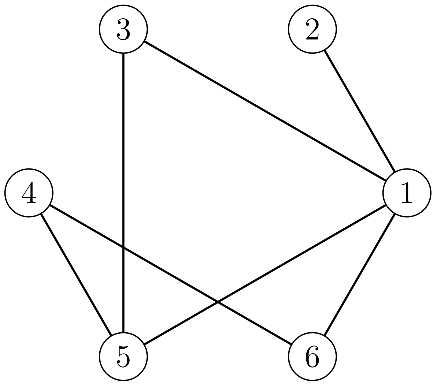
3.1.2



3.1.3



3.1.4 On représente les wagons par les sommets. Une arête relie deux sommets `i` et `j` si les wagons `i` et `j` ne peuvent pas être sur la même voie. On obtient le graphe ci-dessous.



On voit que 1, 3 et 5 ne peuvent pas être sur la même voie. Il faut donc trois voies au minimum.

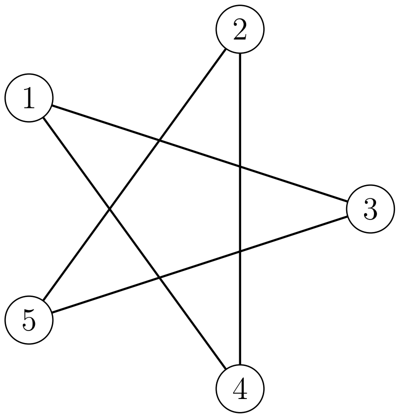
3.1.5 -

3.1.6 -

3.1.7 Considérons un graphe formé au départ d'un certain nombres de sommets et de 0 arêtes. La somme des degrés est alors 0. Chaque fois que l'on ajoute une arête à ce graphe, la somme des degrés augmente de 2, vu que l'arête relie 2 sommets entre eux. Après l'ajout de n arêtes, la somme des degrés du graphe vaut donc $2\,n$. Vu que tout graphe est obtenu par ce procédé, on obtient bien que la somme des degrés est le double du nombre des arêtes.

3.1.8 Considérons le graphe simple dont les sommets sont les 15 ordinateurs, les arêtes étant les liaisons entre ces ordinateurs. Si chaque appareil est relié à exactement 3 ordinateurs du réseau, les sommets du graphe sont tous de degré impair. D'après un résultat établi, un tel graphe doit posséder un nombre pair de sommets, le réseau ne peut donc pas être réalisé.
Autrement dit, il n'est pas possible de relier 15 ordinateurs de sorte que chaque appareil soit relié avec exactement trois autres, car dans ce cas, la somme des degrés serait égale à $15 \times 3 = 45$ qui n'est pas pair.

3.1.9 On suppose que 6 invités sont là, et que Jack en fait partie. Parmi les 5 autres invités, soit il y en a 3 qui le connaissent, soit 3 ne le connaissent pas (par le principe des tiroirs). Sans perte de généralité, on peut supposer que ces trois invités connaissent Jack, et qu'ils s'appellent respectivement Karen, Natalie et Billy. Deux possibilités alors : soit ces trois invités ne se connaissent pas (et on a notre trio gagnant), soit il y en a au moins deux qui se connaissent, et ils forment avec David le trio gagnant.



3.1.10

a) Le graphe est d'ordre 6 (6 sommets).

b) Le degré du sommet 1 : 3 ; du sommet 4 : 4.

c) Les sommets adjacents au sommet 2 : 1, 3, 4 et 6 ; au sommet 6 : 1, 2 et 5.

d) Les sommets adjacents à quatre sommets : 2 et 4.

3.1.11

longueur 3 : $stzy$;

longueur 4 : $stzxy$ et $svtzy$:

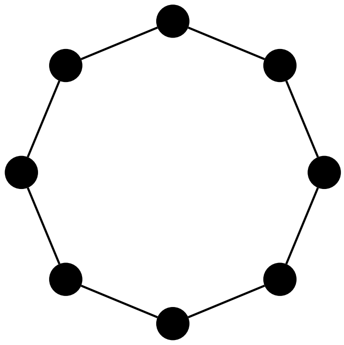
longueur 5 : $stzwxy$, $svtzxy$ et $svutzy$;

longueur 6 : $svutzxy$ et $svtzwxy$;

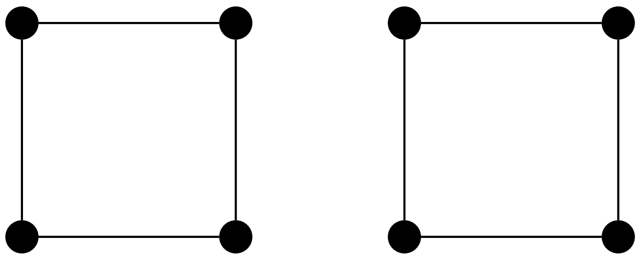
longueur 7 : $svutzwxy$.

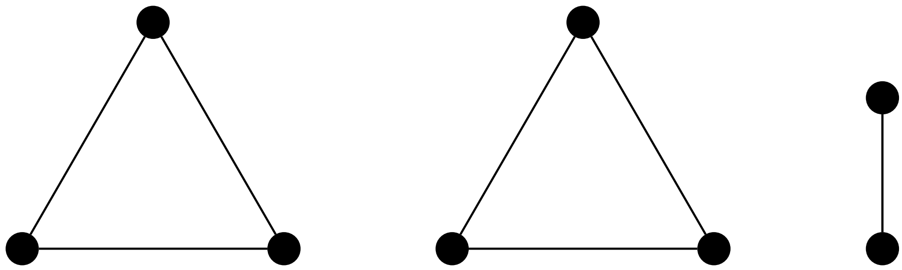
3.1.12

Il y a plusieurs possibilités, par exemple :



a)

b) 

c) 

3.1.13

a) Il n'est pas complet, car le sommet 1 n'est pas relié au sommet 5, par exemple.

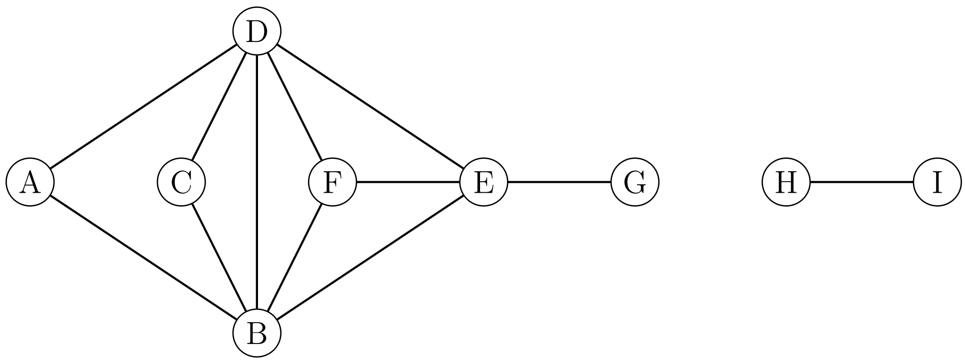
b) Il est connexe, car il est fait « d'un seul morceau ».

c) $G_1 = (2, 5, 3)$ et $G_2 = (2, 4, 3)$. Toute arête du graphe est un graphe complet d'ordre 2.

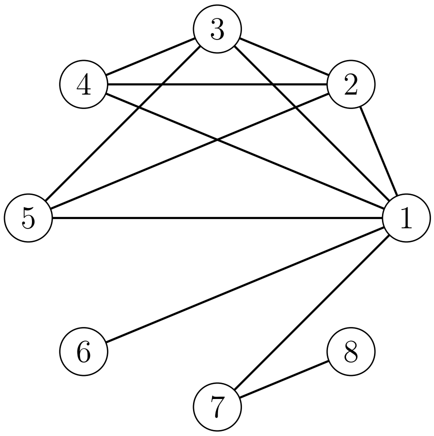
d) Le chemin est donné par la suite de sommets $(1, 2, 4, 3, 5)$; sa longueur est bien 4.

e) Il n'y a pas de cycle comprenant le sommet 1 vu que celui-ci est de degré 1.

3.1.14 Par exemple :



3.1.15 Par exemple :



3.1.16 C'est impossible, car tout graphe a un nombre pair de sommets de degré impair.

3.1.17 —

3.1.18 —

3.1.19 —

3.1.20 —

3.1.21 —

3.1.22 —

3.1.23 —

3.2.1 Les deux premiers ne sont pas des sous-graphes du graphe de Petersen, alors que le troisième est un sous-graphe.

3.2.2

a) Les sommets 1 et 4 sont de degré impair.

b) Il manque l'arête $6-4$.

c) $4-2-1-5-2-3-4-6-1$.

d) $4-2-1-5-2-3-4-6-1-4$.

3.2.3

a) On remarque que le graphe est connexe et que tous ses sommets sont de degré pair sauf les sommets D et G.

   Donc il existe une chaîne eulérienne entre les sommets D et G.

b) Comme on l'a vu dans la question précédente tous les sommets du graphe ne sont pas pairs donc il n'y a pas de cycle eulérien.

3.2.4 Le graphe de gauche n'est évidemment pas eulérien puisque non connexe. Celui du milieu est eulérien car tous les sommets sont de degré pair. Celui de droite est semi-eulérien, car seuls deux sommets sont de degré impair.

3.2.5 Le premier graphe admet une chaîne eulérienne, par exemple $D{-}B{-}C{-}D{-}E{-}A{-}B{-}E$. Le deuxième graphe admet un cycle eulérien: $F{-}G{-}H{-}I{-}J{-}F{-}H{-}J{-}G{-}I{-}F$. Le troisième graphe n'admet ni chaîne, ni cycle eulérien.

3.2.6 —

3.2.7 –

3.2.8 –

3.3.1 —

3.3.2 —

3.3.3 —

3.3.4 —

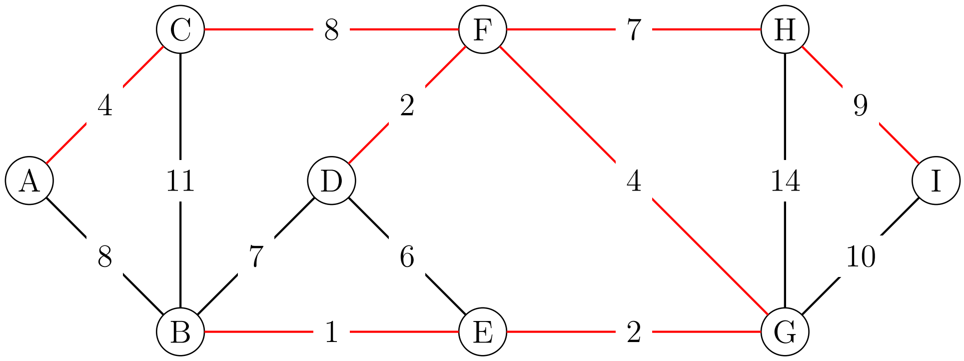
3.3.5 —

3.3.6 —

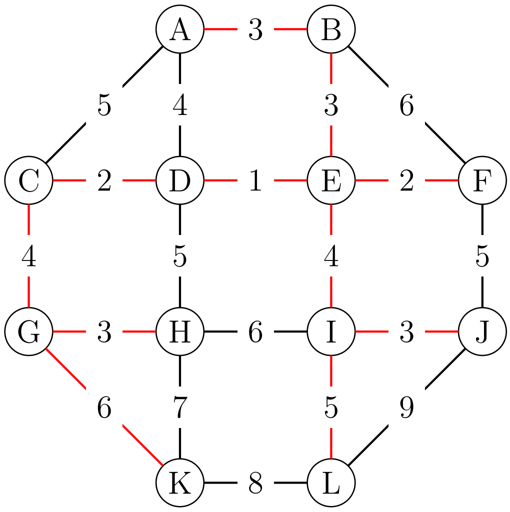
3.3.7 —

3.3.8 —

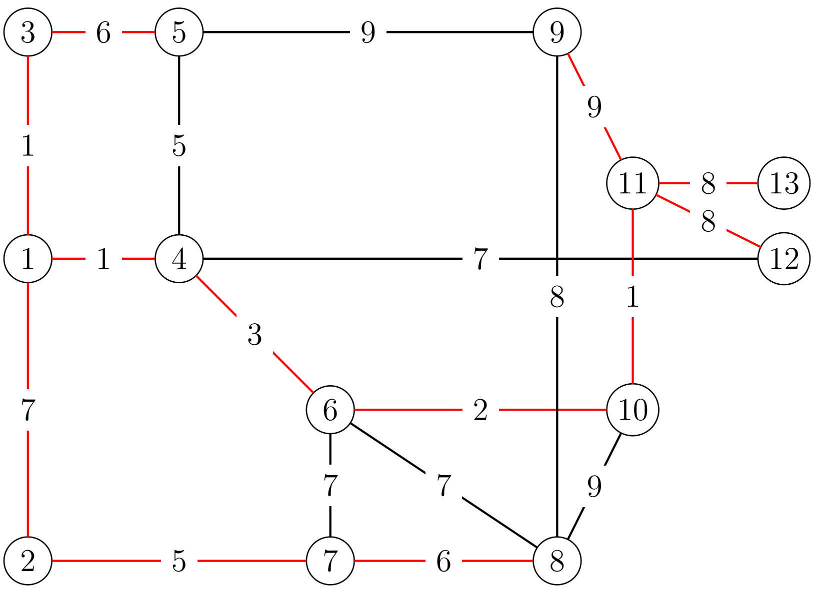
3.3.9



3.3.10



3.3.11 Par exemple, pour l'algorithme de Prim.



3.4.1

a) 4

b) $F - D - B$ de poids 8

3.4.2

Le chemin de poids minimal reliant A à E est $A - F - D - E$ de poids égal à 16.

3.4.3 $A - B - D - G$ de longueur 6

3.4.4 On obtient 3 chemins de 8 minutes :

a) $A - B - E - F$

b) $A - B - D - E - F$

c) $A - C - D - E - F$

3.4.5 Le chemin le plus court est $S - B - C - T$, de longueur 10.

3.4.6

S	T	B	A	C	D	E
$\mathbf{0}$	∞	∞	∞	∞	∞	∞
—	∞	13_{S}	$\mathbf{7_S}$	28_{S}	∞	∞
—	∞	$\mathbf{11_A}$	—	28_{S}	32_{A}	17_{A}
—	∞	—	—	$\mathbf{16_B}$	17_{B}	17_{A}
—	∞	—	—	—	$\mathbf{17_B}$	17_{A}
—	22_{D}	—	—	—	—	$\mathbf{17_A}$
—	$\mathbf{22_D}$	—	—	—	—	—

Le chemin le plus court est S-A-B-D-T, de longueur 22.

3.4.7

S	A	B	C	D	E	F	T
$\mathbf{0}$	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
—	$\mathbf{1_S}$	3_{S}	6_{S}	∞	∞	∞	∞
—	—	$\mathbf{3_S}$	6_{S}	3_{A}	6_{A}	∞	∞
—	—	—	5_{B}	$\mathbf{3_A}$	6_{A}	6_{B}	∞
—	—	—	5_{B}	—	$\mathbf{4_D}$	6_{B}	10_{D}
—	—	—	$\mathbf{5_B}$	—	—	6_{B}	9_{E}
—	—	—	—	—	—	$\mathbf{6_B}$	9_{E}
—	—	—	—	—	—	—	$\mathbf{8_F}$

Le chemin le plus court est S-B-F-T, de longueur 8.

3.4.8

S	A	B	C	D	E	F	T
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
—	$\mathbf{4_S}$	6_S	7_S	∞	∞	∞	∞
—	—	$\mathbf{6_S}$	7_S	11_A	9_A	∞	∞
—	—	—	$\mathbf{7_S}$	11_A	9_A	13_B	∞
—	—	—	—	11_A	$\mathbf{9_A}$	12_C	∞
—	—	—	—	$\mathbf{11_A}$	—	11_E	18_E
—	—	—	—	—	—	$\mathbf{11_E}$	18_E
—	—	—	—	—	—	—	$\mathbf{17_F}$

Le chemin le plus court est S-A-E-F-T, de longueur 17.

3.4.9

S	A	B	C	D	E	F	G	H	T
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
—	3_S	8_S	$\mathbf{2_S}$	∞	∞	∞	∞	∞	∞
—	$\mathbf{3_S}$	8_S	—	∞	3_C	4_C	∞	∞	∞
—	—	8_S	—	∞	$\mathbf{3_C}$	4_C	∞	∞	∞
—	—	8_S	—	∞	—	$\mathbf{4_C}$	9_E	∞	∞
—	—	8_S	—	$\mathbf{5_F}$	—	—	9_E	10_F	10_F
—	—	$\mathbf{8_S}$	—	—	—	—	9_E	9_D	10_F
—	—	—	—	—	—	—	$\mathbf{9_E}$	9_D	10_F
—	—	—	—	—	—	—	—	$\mathbf{9_D}$	10_F
—	—	—	—	—	—	—	—	—	$\mathbf{10_F}$

Le chemin le plus court est S-C-F-T, de longueur 10.

3.4.10

A	B	C	D	E	F	H	K
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
—	$\mathbf{90_A}$	290_A	175_A	150_A	∞	∞	∞
—	—	275_B	175_A	$\mathbf{150_A}$	∞	∞	∞
—	—	275_B	$\mathbf{175_A}$	—	285_E	∞	∞
—	—	$\mathbf{275_B}$	—	—	280_D	395_D	∞
—	—	—	—	—	$\mathbf{280_D}$	395_D	535_C
—	—	—	—	—	—	$\mathbf{395_D}$	510_F
—	—	—	—	—	—	—	$\mathbf{510_F}$

Le chemin le plus court est A-D-F-K, de longueur 510.

3.4.11 Le plus court chemin est B-C-D-F-G. La longueur de ce chemin est de 36 minutes.

3.4.12 a) P–B–C–E–A–D–F–G

b) D'après le théorème d'Euler, il existe une chaîne eulérienne dans un graphe connexe si et seulement si exactement zéro ou deux de ses sommets sont de degrés impairs.

Tous les sommets de ce graphe sont de degrés impairs sauf F, donc il n'existe aucun itinéraire qui emprunte une et une seule fois toutes les voies.

c) Le chemin le plus rapide de P vers G est d'une durée de 21 minutes : P-C-B-D-G.

3.4.13

Le chemin le plus court est X-N-A-C-F-D-H, de longueur 14.