Sommes et récurrence – TE 802A

Problème	1	2	3	4	5	6	Total
Points	4	3	3	3	6	6	25
Points obtenus							

Problème 1 (4 points)
On donne

$$x_1 = 4, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = 5, \quad x_4 = 8 \quad \text{et} \quad x_5 = 10$$

Calculer

a) $\sum_{j=1}^{3} {x_j}^3$ b) $\sum_{i=2}^{5} (x_i - 2) \cdot x_{i-1}$ c) $\sum_{k=1}^{5} (4 \cdot x_k) - 3 \cdot x_5$ d) $\sum_{k=1}^{5} (x_k - k + 1)$

a) $4^3 + 3^3 + 5^3 = 216$

b) $(3-2)\cdot 4 + (5-2)\cdot 3 + (8-2)\cdot 5 + (10-2)\cdot 8$

$i=$ 2 3 4 5

$= 4 + 9 + 30 + 64 = 107$

c) $4\cdot(4+3+5+8+10) - 30 = 120 - 30 = 90$

d) $(4-1+1)+(3-2+1)+(5-3+1)+(8-4+1)+(10-5+1)$

$= 4 + 2 + 3 + 5 + 6 = 20$

Problème 2 (3 points)

Soit $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ une suite finie de nombres réels. Calculer $\sum_{i=1}^{n-1}(\alpha_{i+1} - \alpha_i)$. Justifier le résultat.

$$\sum_{i=1}^{n-1}(\alpha_{i+1} - \alpha_i) = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_{i+1} - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i$$

$$= (\alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n) - (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n-1})$$

$$= \alpha_n - \alpha_1$$

Problème 3 (3 points)

Traduire à l'aide du symbole Σ les sommes suivantes

a) $1 + 5 + 25 + \dots + 5^n$

b) $(-2) + 4 + (-8) + 16 + (-32) + 64$

c) $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{102}{103}$

a) $\sum_{k=0}^{n} 5^k$

b) $\sum_{k=1}^{6} (-1)^k \, 2^k$

c) $\sum_{k=1}^{102} \frac{k}{k+1}$

Problème 4 (3 points)
Lequel de ces 2 nombres est-il le plus grand ?

$$S = 2023 \cdot (1 + 2 + 3 + \ldots \qquad + 2024)$$

$$T = 2025 \cdot (1 + 2 + 3 + \ldots \qquad + 2023)$$

Justifier le résultat.

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

$$S = 2023 \cdot \frac{2024 \cdot 2025}{2} = \frac{2023 \cdot 2024 \cdot 2025}{2}$$

$$T = 2025 \cdot \frac{2023 \cdot 2024}{2} = \frac{2023 \cdot 2024 \cdot 2025}{2}$$

Donc $S = T$

Problème 5 (6 points)
Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, le nombre $3^{2n} - 1$ est un multiple de 8.

a) Le résultat est vrai pour $n = 0$:

$3^0 - 1 = 1 - 1 = 0$ qui est un multiple de 8

b) Supposons le résultat vrai pour n et démontrons-le pour $n+1$.

Par hyp. de récurrence, il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que $3^{2n} - 1 = 8K$. Donc $3^{2n} = 8K + 1$.

Pour $n+1$, on a :

$3^{2(n+1)} - 1 = 3^{2n} \cdot 3^2 - 1 = (8K+1) \cdot 9 - 1$

$= 8 \cdot (9K) + 9 - 8 = 8(9K) + 8 = 8(9K+1)$

qui est bien un multiple de 8.

Problème 6 (6 points)
Démontrer par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot 5^k = \frac{5 + (4\,n - 1)\;5^{n+1}}{16}$$

a) Le résultat est vrai pour $n = 1$:

$$\sum_{k=1}^{1} k \cdot 5^k = 1 \cdot 5^1 = 5$$

$$\frac{5 + (4 \cdot 1 - 1) \cdot 5^2}{16} = \frac{5 + 3 \cdot 25}{16} = \frac{80}{16} = 5$$

b) Supposons le résultat vrai pour n et démontrons-le pour $n+1$.

$$\sum_{k=1}^{n+1} k \cdot 5^k = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} k \cdot 5^k}_{\text{par hyp. de récurrence}} + (n+1) \cdot 5^{n+1}$$

$$= \frac{5 + (4n-1)\, 5^{n+1}}{16} + (n+1) \cdot 5^{n+1}$$

$$= \frac{5 + (4n-1) \cdot 5^{n+1} + 16(n+1) \cdot 5^{n+1}}{16}$$

$$= \frac{5 + \left[4n - 1 + 16n + 16 \right] \cdot 5^{n+1}}{16}$$

$$= \frac{5 + (20n + 15) \cdot 5^{n+1}}{16} = \frac{5 + (4n+3) \cdot 5 \cdot 5^{n+1}}{16}$$

$$= \frac{5 + (4(n+1) - 1) \cdot 5^{(n+1)+1}}{16}$$

cqfd.