

1.1.7 Traduire à l'aide du symbole Σ les sommes suivantes :

$$\text{a) } 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 12^2 + 13^2 + 14^2 = \sum_{k=1}^{14} k^2 = \sum_{j=0}^{13} (j+1)^2$$

$$\text{b) } 11^2 + 12^2 + 13^2 + \dots + 102^2 + 103^2 + 104^2$$

$$\text{c) } \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{13}{14} + \frac{14}{15} + \frac{15}{16}$$

$$\text{d) } 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + 11^2 + 13^2 + 15^2$$

$$\text{e) } (1 \cdot 3) + (2 \cdot 4) + (3 \cdot 5) + (4 \cdot 6) + (5 \cdot 7)$$

$$\text{f) } 1 + 8 + 27 + 64 + 125$$

$$\text{b) } \sum_{j=11}^{104} j^2 \quad \text{c) } \sum_{k=1}^{15} \frac{k}{k+1}$$

$$\text{d) } \sum_{k=0}^7 (2k+1)^2 = \sum_{k=1}^8 (2k-1)^2$$

$$\text{e) } \sum_{k=1}^5 k(k+2)$$

$$\text{f) } \sum_{k=1}^5 k^3$$

1.1.11 Ecrire les sommes suivantes en faisant en sorte que la première valeur de l'indice soit 0, puis 49 :

$$\text{a)} \quad \sum_{i=2}^{45} 1 = \sum_{i=0}^{\dots} \dots = \sum_{i=49}^{\dots} \dots$$

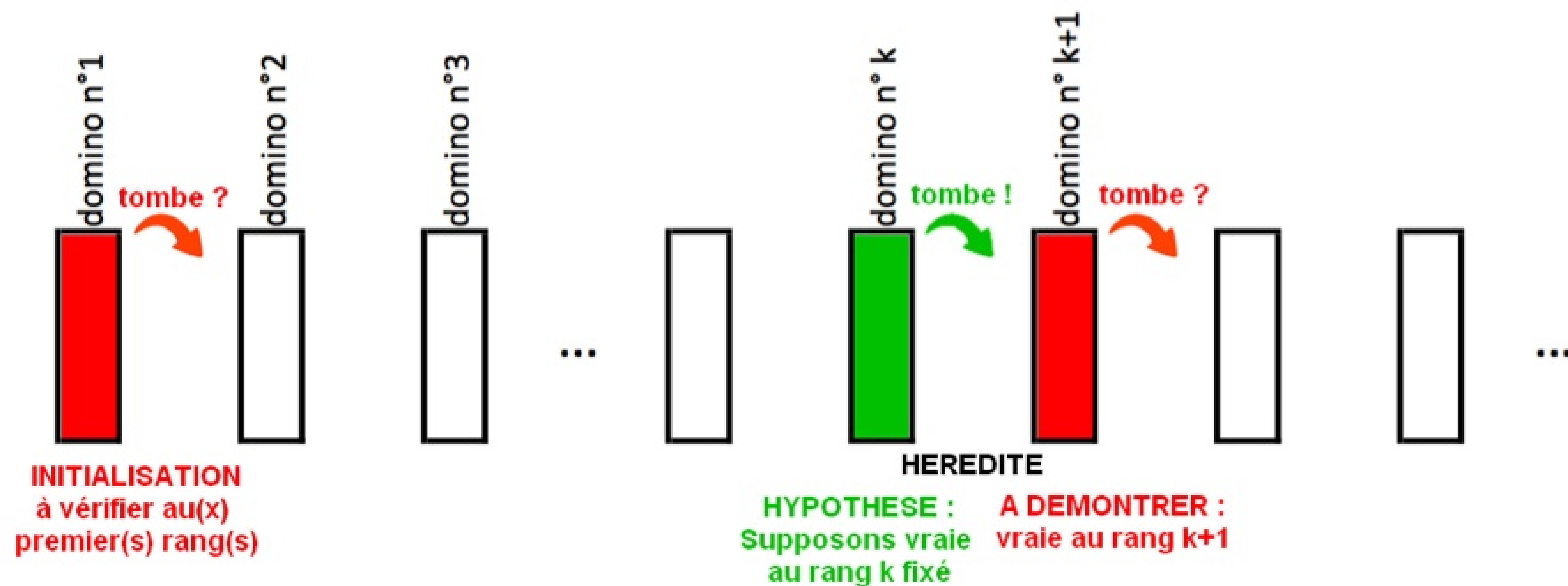
$$\text{b)} \quad \sum_{i=10}^{20} i$$

$$\text{c)} \quad \sum_{k=-4}^{180} \frac{k}{k+5}$$

$$\text{a)} \quad \sum_{i=2}^{45} 1 = \sum_{i=0}^{43} 1 = \sum_{i=49}^{92}$$

$$\text{b)} \quad \sum_{i=10}^{20} i = \sum_{i=0}^{10} (i+10) = \sum_{i=49}^{59} (i-39)$$

Démonstration par récurrence



La démonstration par récurrence s'applique dans le cas où on doit démontrer une proposition P_n pour tout entier $n \geq 0$ ou $n \geq 1$ ou plus généralement $n \geq n_0$ ($n_0 \in \mathbb{N}$).

Une démonstration par récurrence se fait toujours en deux étapes :

- Première phase, dite d'initialisation : on démontre que la proposition est vraie pour la plus petite valeur de l'entier n : 0, 1 ou n_0 .
- Deuxième phase : on suppose que la proposition P_n est vraie et on démontre sous cette hypothèse, appelée hypothèse de récurrence, que la proposition P_{n+1} est vraie.

D'un point de vue formel, on peut écrire :

$$\begin{cases} P_0 \text{ est vrai} \\ n \geq 0 \text{ et } P_n \Rightarrow P_{n+1} \end{cases} \Rightarrow \forall n \geq 0 : P_n \text{ est vrai}$$

1.2.1 Démontrer par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$\text{a) } \sum_{k=1}^n k = \underbrace{\frac{n(n+1)}{2}}_{P_n}$$

$$\text{b) } \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

a) ① Démontrons que la formule lorsque $n = 1$:

$$\sum_{k=1}^1 k = 1 \quad ; \quad \frac{1 \cdot (1+1)}{2} = 1 \quad \left. \vphantom{\sum_{k=1}^1 k} \right\} \text{Initialisation}$$

② Supposons la formule vraie pour n et démontrons-la pour $n+1$.

$$\left(\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \right) \Rightarrow \left(\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \right)$$

En effet,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k &= \sum_{k=1}^n k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + n+1 = \frac{n(n+1) + 2n+2}{2} \\ &= \frac{n^2 + n + 2n + 2}{2} = \frac{n^2 + 3n + 2}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned}$$

$$b) \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

① Initialisation

$$n=1 : \sum_{k=1}^1 k^2 = 1$$

$$n=1 : \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = 1$$

} La formule est vérifiée pour $n=1$

② Supposons la formule vraie pour n et démontrons-la pour $n+1$:

$$\left(\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right) \Rightarrow \left(\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \right)$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^n k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1) [n(2n+1) + 6(n+1)]}{6}$$

$$= \frac{(n+1) (2n^2 + n + 6n + 6)}{6} = \frac{(n+1) (2n^2 + 7n + 6)}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$