23.04.24

Méthodes numériques

Théorème fondamental de l'algèbre

$$P = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_0 \quad , \quad a_k \in \mathbb{R}$$

$$P = a_n (X - z_n)(X - z_{n-1}) \cdots (X - z_1) \quad , \quad z_k \in \mathbb{C}$$

$$P = a_n \underbrace{(X^2 + \alpha_1 X + \beta_1)}_{\Delta < 0} \cdots \underbrace{(X^2 + \alpha_j X + \beta_j)}_{\Delta < 0} (X - a_1) \cdots (X - a_e)$$

Nous savons résoudre des équations avec des formules (Δ), par factorisation ou par division euclidienne.

En général, il est difficile de trouver une solution d'une équation polynomiale.

Exemple 1) $f(x) = x^7 - 2x^5 + x^3 + 11$,

Les solutions de $f(x) = 0$ ne sont pas évidentes à trouver.

A cela, s'ajoute toutes les autres équations, comme

2) $g(x) = 1 - x e^x$, $g(x) = 0$

3) $x \sin(\pi x) - x^2 + \sqrt{2} = 0$

Séparation des racines

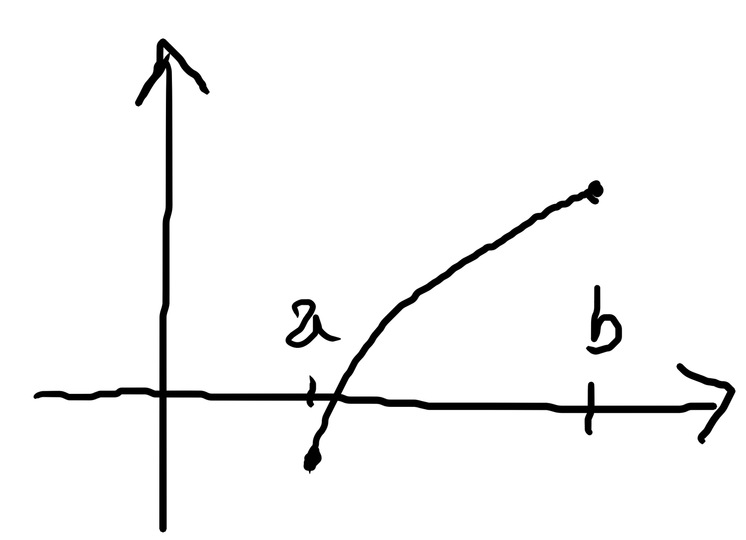
Soit $f(x)$ une fonction continue et dérivable sur un intervalle $I = [a, b]$.

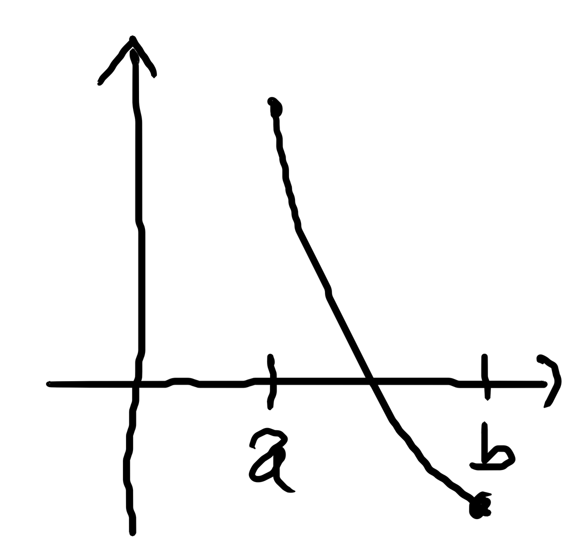
On cherche les zéros de $f(x) = 0$ sur I.

1 On détermine un intervalle $[a, b]$ dans lequel f admet une et une seule racine.

2 Pour cela, on peut tracer la courbe ou utiliser le théorème de la valeur intermédiaire.

Si $f(a) \cdot f(b) < 0$,





alors $f(x)$ s'annule sur $[a, b]$

De plus, si f est monotone sur $[a, b]$, alors le zéro est unique

Critère de Descartes

Ce critère donne la position des zéros d'une équation polynomiale.

- $p(x) = 8x^6 - 7x^2 - 5x - 6$ 1 changement de signe

$V_p = 1$, $z_p = 1$

- $p(-x) = 8x^6 - 7x^2 + 5x - 6$ 3 changement de signe

$V_n = 3$, $z_n = 1$ ou 3

z_p	z_n	$z_{\mathbb{C}}$	zéros
1	1	4	6
1	3	2	6

• $p(x) = 4x^7 - 6x^6 + 9x^5 + 3x^4 + 2x^3 - 7x^2 + 4x - 3$ 5 changements

$V_p = 5$, $z_p = 1, 3$ ou 5

$p(-x) = -4x^7 - 6x^6 - 9x^5 + 3x^4 - 2x^3 - 7x^2 - 4x - 3$

2 changement

$V_n = 2$, $z_n = 0$ ou 2

z_p	z_n	$z_{\mathbb{C}}$	zéros
1	0	6	7
1	2	4	7
3	0	4	7
3	2	2	7
5	0	2	7
5	2	0	7

$z^2 + z + 1 = 0$

$\Delta = -3$

$-1 \pm \sqrt{3}\, i$

$\left(z + \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}\right)\left(z + \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}\right)$

$z^2 + \left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2} + \frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right) z$

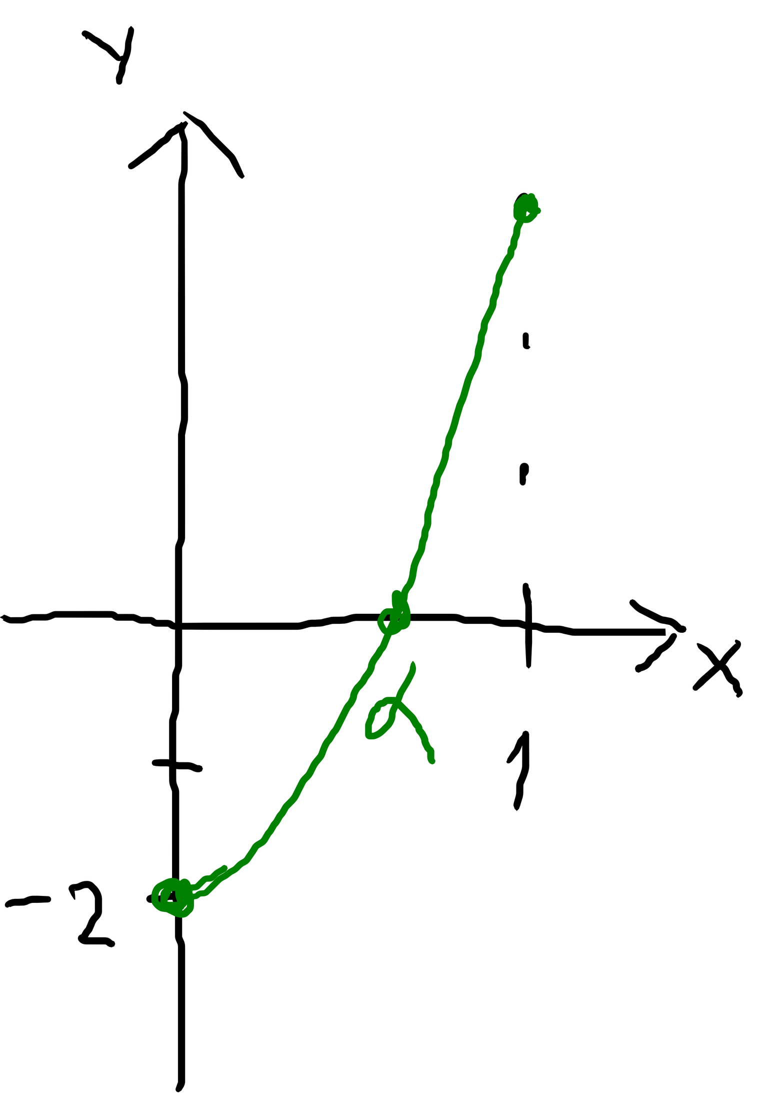
$+ \underbrace{\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)}_{1} =$

Exemple

Calculer au ~~millième~~ centième près la racine de l'équation $\underbrace{x^3+4x-2}_{f(x)} = 0$ dans $[0;1]$

$$\left.\begin{aligned} f(0) &= -2 \\ f(1) &= 3 \end{aligned}\right\} \quad f(0)\cdot f(1) < 0$$

, comme f est continue et dérivable, alors il existe au moins $\alpha \in [0,1]$ tel que $f(\alpha) = 0$



Etudions la croissance de $f(x)$.

$f'(x) = 3x^2 + 4$, $f'(x) > 0 \quad \forall x \in [0,1]$

donc f est strictement croissante.

α est unique.


0,5
0
0,75
1
α* ≈ α

i	a_i	x_i	b_i	$f(a_i)$	$f(x_i)$	$f(b_i)$	$\lvert x_i - x_{i-1} \rvert$
0	0	0.5	1	-2	0,125	3	–
1	0	0,25	0,5	-2	-0,9843	0,125	0,25
2	0,25	0,375	0,5	–	–	+	0,125
3	0,375	0,4375	0,5	–	–	+	0,063
4	0,4375	0,4687	0,5	–	–	+	0,032
5	0,4687	0,4843	0,5	–	+	+	0,016
6	0,4687	0,4765	0,4843	–	+	+	0,008

$|x_6 - x_5| = 0,008 < 0,01 \Rightarrow \alpha \cong 0,4765$

Cette méthode s'appelle la méthode de la bissection.