Exponentielle et Logarithme – TE 805B

Problème	1	2	3	4	5	Total
Points	5	8	[redacted]6	[redacted]10	[redacted]4	[redacted]33
Points obtenus						

Problème 1 (5 points)
Donner l'ensemble de définition des fonctions ci-dessous.

a) $f(x) = \ln\left(\dfrac{2x-5}{x+3}\right)$

b) $g(x) = e^{\sqrt{1-x}}$

a) Condition : $\dfrac{2x-5}{x+3} > 0$

x		-3		$5/2$	
$2x-5$	$-$	||	$-$	0	$+$
$x+3$	$-$	||	$+$		$+$
$\dfrac{2x-5}{x+3}$	$+$	||	$-$	0	$+$

$5/2$

-3

$ED(f) = \left]-\infty\,; -3\right[\cup \left]\frac{5}{2}\,; +\infty\right[$

b) Condition : $1-x \geq 0 \iff x \leq 1$

$ED(g) = \left]-\infty\,; 1\right]$

Problème 2 (8 points)
Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{4\,x^3} = +\infty$

b) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^{2\,x}-e^{3\,x}}{x+1-\cos(x)} = -1$

c) $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{5\,x-15}{e^x-e^3} = \dfrac{5}{e^3}$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3\,x-1}{4\,\ln(x)} = +\infty$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{4x^3} \underset{\text{"}\frac{+\infty}{+\infty}\text{"}}{\overset{BH}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{12x^2} \underset{\text{"}\frac{+\infty}{+\infty}\text{"}}{\overset{BH}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{24x} \underset{\text{"}\frac{+\infty}{+\infty}\text{"}}{\overset{BH}{=}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{24} = \underline{+\infty}$

b) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^{2x}-e^{3x}}{x+1-\cos(x)} \underset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{\overset{BH}{=}} \lim\limits_{x\to0} \dfrac{2e^{2x}-3e^{3x}}{1+\sin(x)} = \dfrac{-1}{1} = \underline{-1}$

c) $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{5x-15}{e^x-e^3} \underset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{\overset{BH}{=}} \lim\limits_{x\to3} \dfrac{5}{e^x} = \underline{\dfrac{5}{e^3}}$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x-1}{4\ln(x)} \underset{\text{"}\frac{+\infty}{+\infty}\text{"}}{\overset{BH}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{\frac{4}{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x}{4} = \underline{+\infty}$

Problème 3 (6 points)

Soit la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^3 - 4\,x^2}{4\,e^x}$

a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f(x)$.

b) Déterminer par calculs ~~toutes~~ les asymptotes de la fonction $f(x)$.

verticales et horizontales

a) $ED(f) = \mathbb{R}$

b) Pas d'AV.

AHG : $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3 - 4x^2}{4e^x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3\left(1 - \frac{4}{x}\right)}{4e^x} \underset{\text{“}\frac{-\infty}{0}\text{”}}{=} -\infty$

pas d'AHG

AHD : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3\left(1 - \frac{4}{x}\right)}{4e^x} \underset{\text{“}\frac{+\infty}{+\infty}\text{”}}{\overset{BH}{=}} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2 - 8x}{4e^x} \underset{\text{“}\frac{+\infty}{+\infty}\text{”}}{\overset{BH}{=}}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{6x - 8}{4e^x} \underset{\text{“}\frac{+\infty}{+\infty}\text{”}}{\overset{BH}{=}} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{6}{4e^x} = 0$

$\Rightarrow$ AHD : $y = 0$

10

Problème 4 ([redacted] points)

Soit la fonction définie par $f(x) = \dfrac{\ln(2\,x)}{x^2}$

a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f(x)$.

b) Déterminer la dérivée de la fonction $f(x)$.

c) Déterminer la croissance de la fonction $f(x)$. Calculer les coordonnées des éventuels extrema.

a) Conditions : • $2x > 0 \Leftrightarrow x > 0$

• $x^2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$

$ED(f) = \,]0\,;+\infty[$

b) $$f'(x) = \frac{\overbrace{\frac{2}{2x}\cdot x^2}^{x} - \ln(2x)\cdot 2x}{x^4} = \frac{x\left(1-2\ln(2x)\right)}{x^4}$$

$$= \frac{1-2\ln(2x)}{x^3}$$

c) zéro de $f'(x)$: $2\ln(2x) = 1 \Leftrightarrow \ln(2x) = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 2x = e^{1/2} \Leftrightarrow x = \sqrt{e}/2$

x	0		$\sqrt{e}/2$	
$1-2\ln(2)$		$+$	0	$-$
x^3		$+$		$+$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	max	$\searrow$

Max $\left(\frac{\sqrt{e}}{2}\,;\,2e^{-1}\right)$

$$f\left(\frac{\sqrt{e}}{2}\right) = \frac{\ln(\sqrt{e})}{\left(\frac{\sqrt{e}}{2}\right)^2} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{e}{4}} = \frac{2}{e} = 2e^{-1}$$

Problème 5 (4 points)
Déterminer les zéros de la dérivée de la fonction $f(x) = (x^2 + 3\,x + 3) \cdot e^x$

$$f'(x) = (2x+3)\,e^x + (x^2+3x+3)\,e^x$$
$$= (x^2+5x+6)\,e^x$$
$$= (x+3)(x+2)\,e^x$$

zéros de $f'(x)$: -3 et -2