3M1 – Jeudi 25 janvier 2024 Nom & prénom : ....

Exp, aire et volume – TE 810A

Problème	1	2	3	4	5	**Total**
Points	12	6	6	6	10	40
Points obtenus						

Problème 1 (12 points)
Calculer :

a) $\displaystyle\int_2^4 \frac{6}{2\,x-3}\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2\,x}{(x^2+4)^3}\,\mathrm{d}x$

a) $C = K\cdot \ln(2x-3)$

$C' = K\cdot \frac{2}{2x-3} \Rightarrow 2K = 6 \Rightarrow K = 3$

$$\int_2^4 \frac{6}{2x-3}\,dx = 3\left[\ln(2x-3)\right]_2^4 = \underline{3\ln(5)}$$

b) $$\int_0^1 \frac{2x}{(x^2+4)^3}\,dx = \int_0^1 2x\,(x^2+4)^{-3}\,dx = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(x^2+4)^2}\right]_0^1$$

$C = K(x^2+4)^{-2}$

$C' = K\cdot(-2)\cdot(x^2+4)^{-3}\cdot 2x = K\cdot(-4x)(x^2+4)^{-3}$

$\Rightarrow -4K = 2 \Rightarrow K = -\frac{1}{2}$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{25}-\frac{1}{16}\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{16-25}{400}\right) = \underline{\frac{9}{800}}$$

c) $\int_0^3 x \cdot e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$

d) $\int_0^9 \sqrt{x}+1\,\mathrm{d}x$

c) $\int_0^3 x\, e^{-x^2}\, dx = -\frac{1}{2}\left[e^{-x^2}\right]_0^3 = -\frac{1}{2}\left(e^{-9}-e^{0}\right)$

$= \underline{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{e^9}-1\right)}$

$c = K\cdot e^{-x^2}$

$c' = K\cdot(-2x)\cdot e^{-x^2} \Rightarrow -2K = 1 \Rightarrow K = -\frac{1}{2}$

d) $\int_0^9 (x^{\frac{1}{2}}+1)\, dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+x\Big|_0^9 = \frac{2}{3}\left(\sqrt{x}\right)^3+x\Big|_0^9$

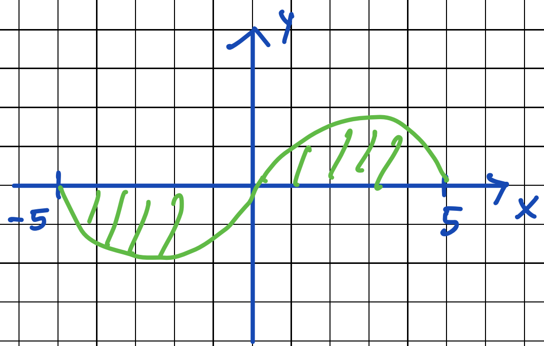
$= \left(\frac{2}{3}\cdot 27+9\right)-0 = 18+9 = \underline{27}$

Problème 2 (6 points)

Soit $f(x) = x \cdot \sqrt{25 - x^2}$.

Calculer l'aire du domaine borné limité par la courbe d'équation $y = f(x)$ et l'axe Ox.

$f(x) = x\sqrt{(5-x)(5+x)}$ $\qquad ED(f) = [-5, 5]$



Aire : $\left|\int_{-5}^{0} x\sqrt{25-x^2}\,dx\right| + \left|\int_{0}^{5} x\sqrt{25-x^2}\,dx\right| = A_1 + A_2$

$\int x(25-x^2)^{1/2}\,dx = -\frac{1}{3}(25-x^2)^{\frac{3}{2}}$

$C = K(25-x^2)^{3/2}$

$C' = K(25-x^2)^{1/2}\cdot\frac{3}{2}\cdot(-2x) = -3Kx(25-x^2)^{1/2} \Rightarrow K = -\frac{1}{3}$

$A_1 = \left|-\frac{1}{3}\left[\left(\sqrt{25-x^2}\right)^3\right]_{-5}^{0}\right| = \left|-\frac{1}{3}(5^3-0)\right| = \frac{125}{3}$

$A_2 = \left|-\frac{1}{3}\left[\left(\sqrt{25-x^2}\right)^3\right]_{0}^{5}\right| = \left|-\frac{1}{3}(0-5^3)\right| = \frac{125}{3}$

Aire : $\frac{125}{3} + \frac{125}{3} = \underline{\frac{250}{3}}$

Problème 3 (6 points)
Calculer l'aire du domaine borné limité par les graphes des fonctions f et g données ci-dessous.

$$f(x) = 2\,x^2 + 3\,x - 18 \qquad \text{et} \qquad g(x) = x^2 + 2\,x - 6$$

Intersection des deux courbes :

$$2x^2 + 3x - 18 = x^2 + 2x - 6$$
$$x^2 + x - 12 = 0$$
$$(x+4)(x-3) = 0$$

Aire : $\left| \int_{-4}^{3} (f(x) - g(x))\, dx \right| = \left| \int_{-4}^{3} x^2 + x - 12 \, dx \right|$

$$= \left| \left. \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 12x \right|_{-4}^{3} \right| = \left| \left. \frac{2x^3 + 3x^2 - 72x}{6} \right|_{-4}^{3} \right|$$

$$= \left| \frac{54 + 27 - 216}{6} - \frac{-128 + 48 + 288}{6} \right| = \left| \frac{-135}{6} - \frac{208}{6} \right|$$

$$= \frac{343}{6} \cong \underline{57{,}16}$$

Problème 4 (6 points)
Le domaine délimité par la courbe d'équation $y = f(x)$ et l'axe Ox tourne autour de cet axe.

Calculer son volume, sachant que $f(x) = x^2 + 3\,x$.

$f(x) = x(x+3)$

Volume :

$$V = \pi \int_{-3}^{0} (x^2+3x)^2 \, dx = \pi \int_{-3}^{0} x^4 + 6x^3 + 9x^2 \, dx$$

$$= \pi \left(\frac{x^5}{5} + \frac{3}{2}x^4 + 3x^3 \right) \Bigg|_{-3}^{0} = \pi \left(0 - \left(\frac{-243}{5} + \frac{243}{2} - 81 \right) \right)$$

$$= \pi \, \frac{81}{10} = \frac{81}{10} \pi$$

Problème 5 (10 points)

La vasopressine est une hormone favorisant la réabsorption de l'eau par l'organisme.

Le taux de vasopressine dans le sang est considéré normal s'il est inférieur à 2.5 μg/mL.

Cette hormone est sécrétée dès que le volume sanguin diminue. En particulier, il y a production de vasopressine suite à une hémorragie.

On utilisera dans la suite la modélisation suivante :

$$f(t) = 3\,t \cdot e^{-t/4} + 2 \quad \text{avec } t \geqslant 0$$

où $f(t)$ représente le taux de vasopressine (en μg/mL) dans le sang en fonction du temps (en minute) écoulé après le début d'une hémorragie.

a) Quel est le taux de vasopressine dans le sang à l'instant $t = 0$?

b) Justifier que douze secondes après une hémorragie, le taux de vasopressine dans le sang n'est pas normal.

c) Déterminer, à l'aide d'un tableau des variations de la fonction $f(t)$, l'instant t pour lequel le taux de vasopressine est maximal. Quel est alors ce taux ?

a) $f(0) = 2 \quad [\mu g/mL]$

b) $f\left(\frac{12}{60}\right) = f(0.2) = 0.6 \cdot e^{-0.2/4} + 2 \cong 0{,}57 + 2 = 2{,}57$

$f(0.2) = 2.57 > 2.5$

Le taux n'est pas normal

c) $f'(t) = 3\,e^{-t/4} + 3t \cdot \left(-\frac{1}{4}e^{-t/4}\right) = 3e^{-t/4}\left(1 - \frac{1}{4}t\right)$

$u = 3t \quad ; \quad u' = 3$

$v = e^{-t/4} \quad ; \quad v' = -\frac{1}{4}\,e^{-t/4}$

$f'(t) = 0 \iff t = 4 \quad [min]$

t		0		4		
$f'(t)$	//		+	0	−	
$f(t)$	//	2	↗	max	↘	

Le max est atteint lorsque $t = 4$ [s]

Le taux est égal à $f(4) = 12 \cdot e^{-1} + 2 = \frac{12}{e} + 2 \cong 6,41$

Le taux est alors de 6.41 [ug/mL]