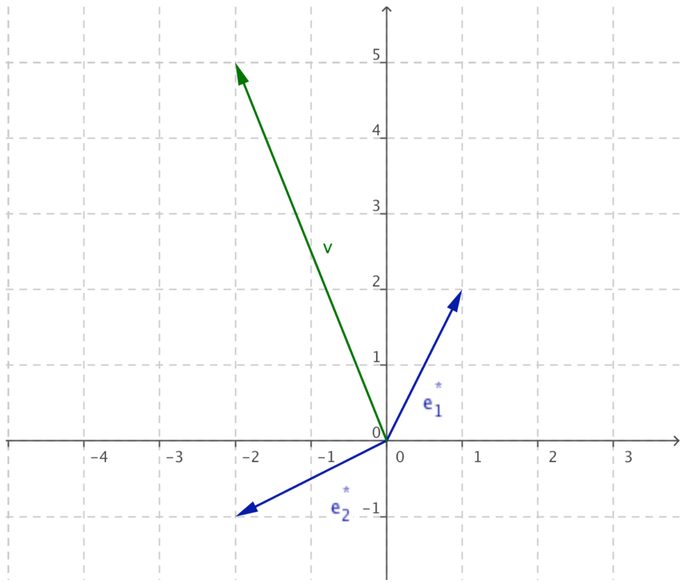
Matrice de changement de bases

Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Soit $\mathcal{B}^* = \big((1\ ;\ 2)\,;(-2\ ;\ -1)\big)$ une deuxième base de $\mathbb{R}^2$.

Posons pour simplifier : $\mathcal{B} = (e_1\ ; e_2)$ et $\mathcal{B}^* = (e_1^*\ ; e_2^*)$



Considérons le vecteur $v = (-2\ ;\ 5)$.

Dans la base $\mathcal{B}$, v s'écrit : $\quad v = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$.

Écrivons v dans la base $\mathcal{B}^*$: $\quad v^* = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\mathcal{B}^*}$.

Nous devons résoudre le système suivant :

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-2y \\ 2x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Ce système s'écrit aussi :

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Calculons l'inverse de la matrice qui apparaît dans ce système :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

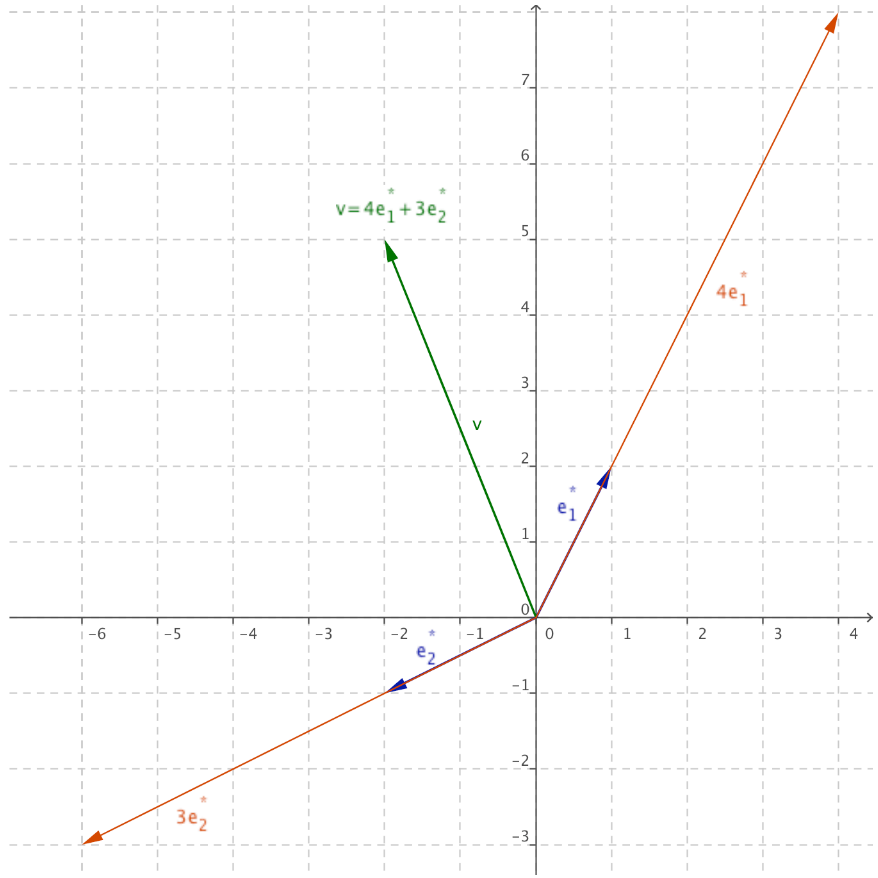
$$\begin{pmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Ainsi : $v^* = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}^*}$.

En résumé, la matrice $\begin{pmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ s'appelle la **matrice de passage** de la base $\mathcal{B}^*$ à la base $\mathcal{B}$.

Nous avons en fait une application linéaire définie ainsi :

$$\begin{array}{rccc} (id)_{\mathbb{R}^2}^{\mathbb{R}^2} : & (\mathbb{R}^2 , \mathcal{B}) & \rightarrow & (\mathbb{R}^2 , \mathcal{B}^*) \\ & v & \mapsto & v^* \end{array}$$



Par ailleurs, la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ s'appelle la **matrice de passage** de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}^*$.

Théorème 4.1

Soit V un espace vectoriel, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}^*$ deux bases de V, ainsi que P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}^*$.

1) Soit U et U^* les matrices des composantes d'un vecteur $u \in V$ relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}^*$ respectivement.

   On a $U = P \cdot U^*$.

2) P est inversible et son inverse P^{-1} est la matrice de passage de $\mathcal{B}^*$ à $\mathcal{B}$.

$$\begin{array}{rccc} (id)_V^V : & (V\ ,\ \mathcal{B}) & \to & (V\ ,\ \mathcal{B}^*) \\ & v & \mapsto & v^* = P^{-1} \cdot v \end{array}$$

Matrice d'une application linéaire

Théorème 4.2

Soit une application linéaire $h : E \rightarrow F$, $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_E^*$ des bases de E, ainsi que $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_F^*$ des bases de F. On considère H la matrice de h relativement aux bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$, H^* la matrice de h relativement aux bases $\mathcal{B}_E^*$ et $\mathcal{B}_F^*$, P la matrice de passage de $\mathcal{B}_E$ à $\mathcal{B}_E^*$ et Q la matrice de passage de $\mathcal{B}_F$ à $\mathcal{B}_F^*$.

On a $H^* = Q^{-1}HP$.

$$\begin{tikzcd}
\left(E\ ,\ \mathcal{B}_E\right) \arrow[r, "h"] & \left(F\ ,\ \mathcal{B}_F\right) \\
\left(E\ ,\ \mathcal{B}_E^*\right) \arrow[u, "\text{matrice } P \ \left(id\right)_E^E"] \arrow[r, "h^*"'] & \left(F\ ,\ \mathcal{B}_F^*\right) \arrow[u, "\left(id\right)_F^F \ \text{matrice } Q"']
\end{tikzcd}$$

Les matrices P et Q sont inversibles.

Déterminant d'un endomorphisme

Les matrices H et H^* d'un endomorphisme $h: V \to V$ relativement à deux bases différentes de V sont liées par la relation $H^* = P^{-1}HP$, où P est la matrice de passage de la première à la deuxième base.

On a donc

$$\det\left(H^*\right) = \det\left(P^{-1}HP\right) = \det\left(P^{-1}\right)\det\left(H\right)\det\left(P\right) = \frac{1}{\det\left(P\right)}\det\left(H\right)\det\left(P\right) = \det\left(H\right)$$

Cette propriété permet de définir la notion de déterminant d'un endomorphisme.

Théorème 4.4

Soit $h: V \to V$ un endomorphisme d'un espace vectoriel V de dimension m.

h est un automorphisme $\Leftrightarrow$ $\det\left(h\right) \neq 0$.

Exemple

Soit $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par :

$$h\big((x\ ;\ y\ ;\ z)\big) = \big(x - y + 5z\ ;\ x + 2y - 4z\ ;\ x + y - z\big)\ .$$

La matrice de h relativement à la base canonique $\mathcal{B}$ est :

$$H = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\ .$$

Soit $\mathcal{B}^* = \big((2\ ;\ -3\ ;\ -1)\ ;\ (3\ ;\ 0\ ;\ 1)\ ;\ (1\ ;\ 1\ ;\ 1)\big)$ une deuxième base de $\mathbb{R}^3$.

La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}^*$: $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

La matrice de passage de $\mathcal{B}^*$ à $\mathcal{B}$: $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -5 \\ -3 & -5 & 9 \end{pmatrix}$.

Donc :

$$H^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -5 \\ -3 & -5 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice H^* de h relativement à la base $\mathcal{B}^*$ est donc

$$H^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{tikzcd}
\left(\mathbb{R}^3 , \mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}\right) \arrow[r, "H = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}"] & \left(\mathbb{R}^3 , \mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}\right) \arrow[d, "P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -5 \\ -3 & -5 & 9 \end{pmatrix}"] \\
\left(\mathbb{R}^3 , \mathcal{B}^*_{\mathbb{R}^3}\right) \arrow[u, "P = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}"] \arrow[r, "H^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}"'] & \left(\mathbb{R}^3 , \mathcal{B}^*_{\mathbb{R}^3}\right)
\end{tikzcd}$$