Les déterminants d'ordre 3

Soit $A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in M_{3x3}(\mathbb{R})$.

Si $V_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}$, $V_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}$ et $V_3 = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$ alors $A = \begin{pmatrix} V_1, & V_2, & V_3 \end{pmatrix}$.

Les matrices particulières A_{ij} :

$$A_{11} = \begin{pmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ \cancel{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \\ \cancel{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

$$A_{23} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cancel{a_{13}} \\ \cancel{a_{21}} & \cancel{a_{22}} & \cancel{a_{23}} \\ a_{31} & a_{32} & \cancel{a_{33}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}, \ldots$$

- Le **mineur** du coefficient a_{ij} est le nombre $\det\left(A_{ij}\right)$.

- Le **cofacteur** du coefficient a_{ij} est le nombre $c_{ij} = \left(-1\right)^{i+j}\det\left(A_{ij}\right)$.

- Le **déterminant** de la matrice A est le nombre, noté $\det\left(A\right)$, défini par

$$\det\left(A\right) = a_{11}c_{11} + a_{12}c_{12} + a_{13}c_{13} = a_{11}\det\left(A_{11}\right) - a_{12}\det\left(A_{12}\right) + a_{13}\det\left(A_{13}\right) .$$

On vérifie que :

- $\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$

Résultats :

1) Si $A = \left(V_1, \; V, \; V \right)$, $\det\left(A\right) = 0$.

$$\begin{vmatrix} a & x & x \\ b & y & y \\ c & z & z \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} y & y \\ z & z \end{vmatrix} - b \cdot \begin{vmatrix} x & x \\ z & z \end{vmatrix} + c \cdot \begin{vmatrix} x & x \\ y & y \end{vmatrix} = 0 .$$

De même $\left| V \;,\; V_1, \; V \right| = \left| V \;,\; V, \; V_1 \right| = 0$.

2) $\det\left(\alpha \cdot V_1, \ V_2, \ V_3 \right) = \alpha \cdot \det\left(V_1, \ V_2, \ V_3 \right)$; et

$$\det\left(V_1, \ \alpha \cdot V_2, \ V_3 \right) = \det\left(V_1, \ V_2, \ \alpha \cdot V_3 \right) = \alpha \cdot \det\left(V_1, \ V_2, \ V_3 \right).$$

$$\det\left(\alpha \cdot V_1, \ \beta \cdot V_2, \ \gamma \cdot V_3 \right) = \alpha\beta\gamma \cdot \det\left(V_1, \ V_2, \ V_3 \right).$$

3) $\det\left(V_1, \ V_2 + V_2^*, \ V_3 \right) = \det\left(V_1, \ V_2, \ V_3 \right) + \det\left(V_1, \ V_2^*, \ V_3 \right)$.

$$\det\left(V_1, \ V_2 + V_2^*, \ V_3 \right) = \ldots$$

$$\begin{vmatrix} a & x + x^* & g \\ b & y + y^* & h \\ c & z + z^* & i \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} y + y^* & h \\ z + z^* & i \end{vmatrix} - b \cdot \begin{vmatrix} x + x^* & g \\ z + z^* & i \end{vmatrix} + c \cdot \begin{vmatrix} x + x^* & g \\ y + y^* & h \end{vmatrix} =$$

$$a \cdot \left[\left(y + y^* \right) \cdot i - \left(z + z^* \right) \cdot h \right] - b \cdot \left[\left(x + x^* \right) \cdot i - \left(z + z^* \right) \cdot g \right] + c \cdot \left[\left(x + x^* \right) \cdot h - \left(y + y^* \right) \cdot g \right] =$$

$$a \cdot \left[y \cdot i - z \cdot h \right] - b \cdot \left[x \cdot i - z \cdot g \right] + c \cdot \left[x \cdot h - y \cdot g \right] +$$

$$a \cdot \left[y^* \cdot i - z^* \cdot h \right] - b \cdot \left[x^* \cdot i - z^* \cdot g \right] + c \cdot \left[x^* \cdot h - y^* \cdot g \right] =$$

$$\ldots = \det\left(V_1, \ V_2, \ V_3 \right) + \det\left(V_1, \ V_2^*, \ V_3 \right) .$$

4) $\det\left(V_1,\ V_2,\ V_3 \right) = -\det\left(V_2,\ V_1,\ V_3 \right)$.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{22}a_{31} - a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{23}a_{31} - a_{11}a_{22}a_{33}$$

5) $\det\left(V_1,\ V_2,\ V_3 \right) = \det\left(V_1 + \alpha \cdot V_2,\ V_2,\ V_3 \right)$.

$$\det\left(V_1 + \alpha \cdot V_2,\ V_2,\ V_3 \right) = \det\left(V_1,\ V_2,\ V_3 \right) + \det\left(\alpha \cdot V_2,\ V_2,\ V_3 \right) =$$

$$\det\left(V_1,\ V_2,\ V_3 \right) + \alpha \cdot \det\left(V_2,\ V_2,\ V_3 \right) = \det\left(V_1,\ V_2,\ V_3 \right) .$$

Les déterminants d'ordre n

Le déterminant de A par rapport à la première ligne :

$$\det(A) = a_{11}c_{11} + a_{12}c_{12} + \ldots + a_{1n}c_{1n} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \cdot (-1)^{1+j} \det(A_{1j})$$

Le déterminant de A par rapport à la $k^{ème}$ ligne :

$$\det(A) = a_{k1}c_{k1} + a_{k2}c_{k2} + \ldots + a_{kn}c_{kn} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} \cdot (-1)^{k+j} \det(A_{kj}) \ , \ 1 \le k \le n \ .$$

Le déterminant de A par rapport à la $k^{ème}$ colonne:

$$\det(A) = a_{1k}c_{1k} + a_{2k}c_{2k} + \ldots + a_{nk}c_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{jk} \cdot (-1)^{j+k} \det(A_{jk}) \ , \ 1 \le k \le n \ .$$

avec $c_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$.

Propriétés :

1) $\det(V_1,\ldots,C+C',\ldots,V_n)=\det(V_1,\ldots,C,\ldots,V_n)+\det(V_1,\ldots,C',\ldots,V_n)$.

2) $\det(V_1,\ \ldots\ ,\alpha\cdot V_k,\ \ldots\ ,V_n)=\alpha\cdot\det(V_1,\ \ldots\ ,V_k,\ \ldots\ ,V_n)$.

3) $\det(V_1,\ \ldots\ ,V_k,\ V_k,\ \ldots\ ,V_n)=0$.

4) $\det(A_1,\ldots,A_j,\ldots,A_k,\ldots,A_n)=-\det\left(A_1,\ldots,A_k,\ldots,A_j,\ldots,A_n\right)$.

$$\det(A_1,\ldots,A_j,\ldots,A_k,\ldots,A_n)=-\det(A_1,\ldots,A_{j-1},A_{j+1},A_j,A_{j+2},\ldots,A_k,\ldots,A_n)=$$
$$=\left(-1\right)^{k-j}\det\left(A_1,\ldots,A_{j-1},A_{j+1},\ldots,A_k,A_j,A_{k+1}\ldots,A_n\right)=$$
$$=\left(-1\right)^{\left(k-j\right)+\left(k-1-j\right)}\det\left(A_1,\ldots,A_{j-1},A_k,A_{j+1},\ldots,A_{k-1},A_j,A_{k+1},\ldots,A_n\right)\overset{\text{car }(-1)^{2(k-j)-1}=-1}{=}$$
$$=-\det\left(A_1,\ldots,A_k,\ldots,A_j,\ldots,A_n\right).$$

5) $\det(A_1,\ldots,A_k,\ldots,A_k,\ldots,A_n)=0$.

6) $\det(A_1,\ldots,A_k+\sum\limits_{i=1,\ i\neq k}^{n}\alpha_i\cdot A_i,\ldots,A_n)$

$$=\det\left(A_1,\ldots,A_k,\ldots,A_n\right)+\sum_{i=1,\ i\neq k}^{n}\alpha_i\det\left(A_1,\ldots,A_i,\ldots,A_i,\ldots,A_n\right)=\det\left(A\right)$$

Matrices inversibles

Soit $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. A est dite régulière ou inversible s'il existe une matrice B d'ordre n telle que $AB = BA = I_n$. A est dite singulière dans le cas contraire.

- Si A est régulière, on note $B = A^{-1}$. B est appelée l'inverse de A.
- Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in M_{3x3}(\mathbb{R})$, ${}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \in M_{3x3}(\mathbb{R})$.

Résultats :

1) $\det\left({}^tA\right) = \det(A)$.

2) $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$.

3) Soit $C = \left((-1)^{i+j} \cdot \det(A_{ij})\right)$ la matrice des cofacteurs de A ; on a

$$A\,{}^tC = {}^tCA = \det\left(A\right) \cdot I_n \ .$$

4) A inversible $\Leftrightarrow \det\left(A\right) \neq 0$.

5) L'inverse d'une matrice régulière A est donnée par $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \cdot ({}^tC)$

où C est la matrice des cofacteurs de A.

Exemple

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ \boxed{-2} & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} \underset{L_2 \to L_2 - L_4}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 7 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ \boxed{-2} & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 7 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} \underset{L_4 \to L_4 + 2 \cdot L_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 7 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 & 7 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 2 & \boxed{-2} & 7 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{vmatrix} \underset{C_2 \to C_2 + C_1}{=} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & \boxed{-2} & 3 \end{vmatrix} \underset{L_3 \to L_3 + 2 \cdot L_2}{=} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$2 \cdot 5 - 7 \cdot 5 = -25 \ .$$

Donc $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -25$.