

## Algèbre linéaire – La diagonalisation

### Exercice 1

On considère l'endomorphisme  $f$  de  $\mathbb{R}^3$  défini par

$$f : (x, y, z) \rightarrow (3x - z, 2x + 4y + 2z, -x + 3z)$$

- Déterminer la matrice  $A$  de  $f$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .
- Déterminer le polynôme caractéristique de  $f$ . En déduire les valeurs propres de  $f$ .
- Déterminer une base pour chaque espace propre de  $f$ . L'endomorphisme  $f$  est-il diagonalisable ?
- Trouver une matrice  $P$  telle que  $A = P D P^{-1}$ , où  $D$  est une matrice diagonale que l'on explicitera.
- Déterminer la matrice  $A^n$ , pour tout  $n \geq 1$ .

### Exercice 2

Diagonaliser les matrices suivantes, lorsque cela est possible.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

### Exercice 3

Déterminer les nombres réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  pour que la matrice  $A$  soit diagonalisable :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$