1.3.24 Soit P_2 l'ensemble des polynômes de la forme $P(x) = a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2$, avec a_0, a_1, a_2, a_3 des nombres réels. Soit $B = (1, x, x^2)$ la base canonique de P_2.
Considérons l'application d de P_2 dans P_2 définie par $d(P) = (x+1)\,P'$, où P' est la dérivée de P par rapport à x.

$$P_2[x] = \{ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \}$$

$\mathcal{B} = (1, x, x^2)$ base canonique de $P_2[x]$

$$\begin{aligned} d :\ P_2[x] &\longrightarrow P_2[x] \\ p &\longmapsto (x+1)\cdot p' \end{aligned}$$

a) Montrer que d est un endomorphisme.

b) Déterminer la matrice D de d par rapport à B.

c) Déterminer le rang de d.

d) Trouver une base de l'image de d.

e) Trouver une base de noyau de d.

a) Soit $p, q \in P_2[x]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Montrons que d est une application linéaire :

- $d(p+q) = (x+1)\cdot(p+q)' = (x+1)\cdot(p'+q')$
$= (x+1)\cdot p' + (x+1)\cdot q' = d(p) + d(q)$
- $d(\lambda p) = (x+1)\cdot(\lambda p)' = (x+1)\cdot \lambda p'$
$= \lambda\cdot(x+1)\,p' = \lambda\, d(p)$

Ainsi, d est une application linéaire de $P_2[x]$ dans $P_2[x]$, c'est donc un endomorphisme.

b) $d(1) = (x+1)\cdot(1)' = (x+1)\cdot 0 = 0$

$d(x) = (x+1)\cdot(x)' = (x+1)\cdot 1' = x+1$

$d(x^2) = (x+1)\,(x^2)' = (x+1)\cdot 2x = 2x^2 + 2x$

donc: $d(1) = 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_B$

$d(x) = x+1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_B$

$d(x^2) = 2x^2 + 2x = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}_B$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

c) Mettons la matrice D sous sa forme échelonnée réduite:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \text{rang}(D) = 2 \quad (= \text{rang}(d))$

d) $\text{Im}(d) = < \left((1+x,\ 2x+2x^2) \right)$

e) $\text{Ker}(d) = \{ a \mid a \in \mathbb{R} \} = < (1) >$