1.3.6 Un endomorphisme g de $\mathbb{R}^2$ envoie $(2;-1)$ sur $(1;1)$ et $(0;2)$ sur $(3;1)$.
Former la matrice G de g relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et déterminer l'image de $u=(-4;1)$ par g, ainsi que son image réciproque par g.

$$g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & g(x,y) \end{array} \qquad \mathcal{B} = \big(\underbrace{(1,0)}_{e_1}, \underbrace{(0,1)}_{e_2}\big)$$

On sait que $g((2,-1)) = (1,1)$ et $g((0;2)) = (3,1)$

<u>But</u>: déterminer $g(e_1)$ et $g(e_2)$.

<u>Première méthode</u>

$$\mathcal{B}^* = \big((2,-1), (0,2)\big)$$

Exprimons les vecteurs e_1 et e_2 dans $\mathcal{B}^*$:

- e_1 : $e_1 = (1,0) = a(2,-1) + b(0,2) = (2a, -a) + (0,2b)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 = 2a \\ 0 = -a + 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{2} + 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{4} \end{cases}$$

- e_2: $e_2 = (0,1) = c(2,-1) + d(0,2) = (2c, -c+2d)$

$$\Rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ d = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Donc $g(e_1) = \frac{1}{2} \cdot g((2,-1)) + \frac{1}{4} \cdot g((0,2))$

$$= \frac{1}{2} \cdot (1,1) + \frac{1}{4} \cdot (3,1) = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}, \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = \left(\frac{5}{4}, \frac{3}{4}\right)$$

$$g(e_2) = 0 \cdot g((2,-1)) + \frac{1}{2} \cdot g((0,2))$$

$$= \frac{1}{2}(3,1) = \left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$$

On a ainsi la matrice de g : $G = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$$g(u) = g((-4,1)) = \begin{pmatrix} 5/4 & 3/2 \\ 3/4 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -14 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7/2 \\ -5/2 \end{pmatrix}$$

Deuxième méthode

On pose $G = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2a - c = 1 \\ 2b - d = 1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2c = 3 \\ 2d = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 5/4 \\ b = 3/4 \\ c = 3/2 \\ d = 1/2 \end{cases}$$

Schéma :

$$\begin{tikzcd} (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}) \arrow[r, "G"] & (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}) \arrow[l, bend left, "G^{-1}"] \end{tikzcd}$$

$$g^{-1}((-4,1)) = G^{-1} \cdot u$$

Déterminons G^{-1} :

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 5 & 6 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{6}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{6}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & -\frac{8}{5} & -\frac{3}{5} & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{6}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{8} & -\frac{5}{8} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & \frac{3}{8} & -\frac{5}{8} \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \quad G^{-1} = 4 \cdot \begin{pmatrix} -1/4 & 3/4 \\ 3/8 & -5/8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3/2 & -5/2 \end{pmatrix}$$

$$g^{-1}\left((-4,1)\right) = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3/2 & -5/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -17/2 \end{pmatrix}$$