Ex 2.3.18 18.02.21

e) $f(x) = \dfrac{e^x + 2}{1 - 3e^x}$

1) Recherche de ED(f)

Il faut exclure les zéros du dénominateur :

$$\begin{aligned} 3e^x &= 1 \quad \Big|\ \div 3 \\ e^x &= \frac{1}{3} \\ x &= \ln\left(\frac{1}{3}\right) \quad \text{ou} \quad x = -\ln(3) \end{aligned}$$

$ED(f) = \mathbb{R} - \{-\ln(3)\}$

2) Aucune parité, ED(f) non symétrique par rapport à 0, (aucune période).

3) Signe de f :

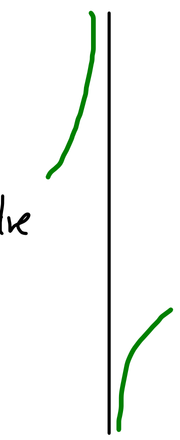
x		$-\ln(3)$	
$f(x)$	$+$	$\Vert$	$-$

4) <u>AV</u> :

$$\lim_{x \to -\ln(3)} \frac{e^x + 2}{1 - 3e^x} \underset{\text{" }\frac{7/3}{0}\text{ "}}{=} \infty \implies AV \quad x = -\ln(3)$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \underset{<}{\to} -\ln(3)} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \underset{>}{\to} -\ln(3)} f(x) = -\infty \end{cases}$$

position entre l'AV et la courbe



$x = -\ln(3)$

<u>AH/AO</u> :

• A droite : $m = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x + 2}{x(-3e^x + 1)} \underset{\text{" }\frac{+\infty}{-\infty}\text{ "}}{=}$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{e^x}\left(1 + \frac{2}{e^x}\right)}{x\cancel{e^x}\left(-3 + \frac{1}{e^x}\right)} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x + 2}{1 - 3e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{e^x}\left(1 + \frac{2}{e^x}\right)}{\cancel{e^x}\left(-3 + \frac{1}{e^x}\right)} = -\frac{1}{3}$$

AHD : $y = -\frac{1}{3}$

• A gauche : $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x + 2}{1 - 3e^x} = 2$

AHG : $y = 2$

Intersection entre les AH et la courbe :

$f(x) = 2$: $\dfrac{e^x + 2}{1 - 3e^x} = 2$

$e^x + \underline{2} = \underline{2} - 6e^x$

$7e^x = 0$ pas de sol.

$f(x) = -\frac{1}{3}$: $e^x + 2 = -\frac{1}{3}(1 - 3e^x)$

$\underline{e^x} + 2 = -\frac{1}{3} + \underline{e^x}$ pas de sol

Aucune intersection

5) Etude de la croissance

b)

$u = e^x + 2$; $u' = e^x$

$v = 1 - 3e^x$; $v' = -3e^x$

$$f'(x) = \frac{e^x(1-3e^x) - (e^x+2)(-3e^x)}{(1-3e^x)^2}$$

$$= \frac{e^x\left[1-3e^x+3e^x+6\right]}{(1-3e^x)^2} = \frac{7e^x}{(1-3e^x)^2}$$

$ED(f') = ED(f)$

x		$-\ln(3)$	
$f'(x)$	$+$	$\|\|$	$+$

La fonction est toujours croissante.

6) Etude de la courbure

$$f'(x) = \boxed{\frac{7e^x}{(1-3e^x)^2}}$$

$u = 7e^x \; ; \; u' = 7e^x$

$v = (1-3e^x)^2$

$v' = 2(1-3e^x) \cdot (-3e^x)$

$\quad = -6e^x(1-3e^x)$

$$f''(x) = \frac{7e^x(1-3e^x)^2 - 7e^x\left(-6e^x(1-3e^x)\right)}{(1-3e^x)^4}$$

$$= \frac{7e^x\cancel{(1-3e^x)}\left[1-3e^x+6e^x\right]}{(1-3e^x)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$= \frac{7e^x(1+3e^x)}{(1-3e^x)^3}$$

$ED(f'') = ED(f)$

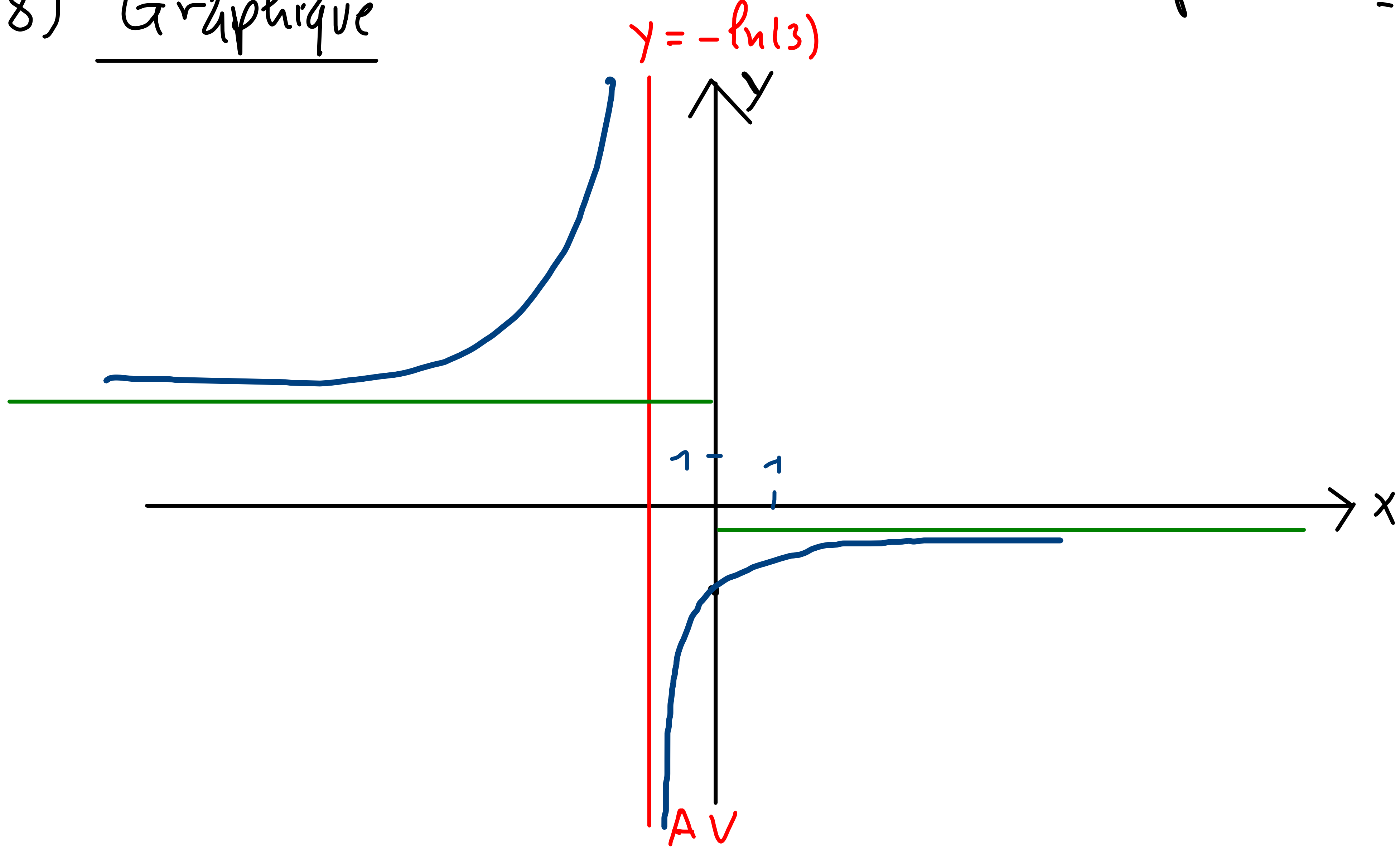
x		$-\ln(3)$	
$f''(x)$	$+$	$\|\|$	$-$
	convexe		concave

7) Résumé

x		$-\ln(3)$	
$f(x)$	↗	‖	↗

8) Graphique

$$f(0) = \frac{3}{-2}$$



b) 2, 3, 19 a)