02.03.21

2.3.19 Étudier les fonctions suivantes :

a) $f(x) = x^2 \ln(x)$

1) $ED(f) = \mathbb{R}_+^*$ $\qquad \ln(x)$ est défini $\Leftrightarrow x > 0$

2) Parité : aucune car $ED(f)$ non symétrique

3) Signe

x		0		1	
$f(x)$	//////	$\|\|$	$-$	0	$+$

$$x^2 \ln(x) = 0 \quad \Big| \div x^2 \text{ car } x > 0$$
$$\ln(x) = 0$$
$$x = 1$$

4) AV :

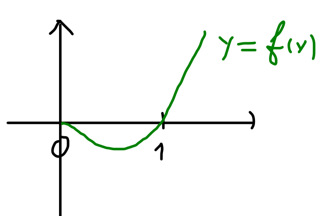
$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} x^2 \ln(x) \overset{\text{ind}}{=} \underset{\text{"}0 \cdot -\infty\text{"}}{} \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x^2}} \overset{\text{BH}}{=} \text{"}\frac{-\infty}{+\infty}\text{"}$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{\frac{1}{x}}{-2\frac{1}{x^3}} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{\cancel{x}} \cdot \frac{\cancel{x^3}^{\,2}}{1} \cdot \frac{1}{-2} =$$

$$(x^{-2})' = -2x^{-3}$$

$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} -\frac{1}{2}x^2 = 0_-$$

Pas d'AV à droite en $x = 0$



Point trou en $(0,0)$

AH / AO à droite $\qquad$ (aucune asymp. à gauche)

AO: $m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} x \ln(x) = +\infty$ aucune AO

AH : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ aucune AH

5) Etude de la croissance

$$f'(x) = 2x\ln(x) + x^2 \cdot \frac{1}{x} = x\left(2\ln(x)+1\right)$$

$$ED(f') = ED(f) = \mathbb{R}_+^*$$

$$f'(x) = 0 \iff 2\ln(x) + 1 = 0$$

$$\ln(x) = -\frac{1}{2}$$

$$x = e^{-1/2} \quad \text{ou} \quad x = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

$x \simeq 0.606530659712633$

x	0		$1/\sqrt{e}$	
$f'(x)$	//	$-$	0	$+$
$f(x)$	//	$\searrow$	$\boxed{\text{min}}$	$\nearrow$

min en $\left(\frac{1}{\sqrt{e}} ; \frac{-1}{2e}\right)$

$$f\left(e^{-1/2}\right) = \left(e^{-1/2}\right)^2 \cdot \ln\left(e^{-1/2}\right)$$

$$= e^{-1} \cdot -\frac{1}{2} = \frac{-1}{2e}$$

$\simeq -0.183939720585721$

Que se passe-t-il en $x=0$?

$$\lim_{x \to 0^>} f'(x) = \lim_{x \to 0^>} x\left(2\ln(x)+1\right) \underset{0 \cdot -\infty}{\overset{\text{ind}}{=}}$$

$$= \lim_{x \to 0^>} \frac{2\ln(x)+1}{\frac{1}{x}} \underset{\text{"}\frac{-\infty}{+\infty}\text{"}}{\overset{BH}{=}} \lim_{x \to 0} \frac{\frac{2}{x}}{\frac{-1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x \to 0^>} -2x = 0_-$$

La pente est nulle, on a une tangente horizontale en $x = 0$

6) Courbure

A faire

7) Graphique