# Révision pour l'examen III – Exercices supplémentaires

## Exercice 1

L'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[x]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 est muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (x^2\,;\,x;\,,1)$.
On considère l'application $f$ qui à tout polynôme $\mathrm{P}(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ de $\mathbb{R}_2[x]$ associe

$$f(\mathrm{P}(x)) = \mathrm{P}(x) + (3\,x-1)\,\mathrm{P}'(x) - (2\,x^2-5)\,\mathrm{P}''(x)$$

$\mathrm{P}'(x)$ , $\mathrm{P}''(x)$ désignant les dérivées première et seconde de $\mathrm{P}(x)$. On admet que $f$ est un endomorphisme.

a) Déterminer la matrice M de $f$ relativement à la base $\mathcal{B}$.

b) Déterminer une base $\mathcal{B}'$ relativement à laquelle la matrice $\mathrm{M}'$ de $f$ est diagonale, ainsi que cette matrice $\mathrm{M}'$ .

c) Calculer $\mathrm{M}^n$. En déduire l'image de $x^2-x-1$ par $f^5$ .

d) Montrer que $f$ est un automorphisme de $\mathbb{R}_2[x]$, calculer $\mathrm{M}^{-1}$, puis déterminer le polynôme P dont l'image par $f$ est $6\,x^2+12\,x+13$.

## Exercice 2

Soit $h$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ donné par sa matrice

$$\mathrm{H} = \begin{pmatrix} \frac{5}{9} & \frac{-4}{9} & \frac{-2}{9} \\ \frac{-4}{9} & \frac{5}{9} & \frac{-2}{9} \\ \frac{-2}{9} & \frac{-2}{9} & \frac{8}{9} \end{pmatrix}$$

relativement à la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ .

a) Calculer le déterminant de la matrice H .

b) Déterminer une base de $\ker(h)$ et une base de $\mathrm{I}m(h)$ .

c) Calculer les valeurs propres de $h$ .

d) Déterminer les espaces propres associés à ces valeurs propres.

e) Déterminer une base $\mathcal{B}^\star$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice H est diagonale. Donner cette matrice diagonale.

# Réponses