

Soit h un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice $H = \begin{pmatrix} 11 & -1 & -1 \\ 6 & 6 & 3 \\ -7 & 17 & -1 \\ 6 & 6 & 3 \\ 1 & -5 & 4 \\ 6 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

- 1) Calculer les valeurs propres de h , ainsi que les sous-espaces propres associés.
- 2) La matrice H est-elle diagonalisable ? Justifier la réponse.
Si oui, la diagonaliser.
- 3) Montrer que le sous-espace propre engendré par la plus petite des valeurs propres est orthogonal au plan α engendré par les autres vecteurs propres.
Quelle est l'équation du plan α ?

Problème 1 Beau lieu 2003

$$1) H = \begin{pmatrix} 11/6 & -1/6 & -1/3 \\ -7/6 & 17/6 & -1/3 \\ 1/6 & -5/6 & 4/3 \end{pmatrix}$$

$$|H - \lambda I| = \begin{vmatrix} \frac{11}{6} - \lambda & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{7}{6} & \frac{17}{6} - \lambda & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{5}{6} & \frac{4}{3} - \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{11-6\lambda}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{2}{6} \\ -\frac{7}{6} & \frac{17-6\lambda}{6} & -\frac{2}{6} \\ \frac{1}{6} & -\frac{5}{6} & \frac{8-6\lambda}{6} \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{1}{6}\right)^3 \begin{vmatrix} 11-6\lambda & -1 & -2 \\ -7 & 17-6\lambda & -2 \\ 1 & -5 & 8-6\lambda \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{6}\right)^3 (-2) \begin{vmatrix} 11-6\lambda & -1 & 1 \\ -7 & 17-6\lambda & 1 \\ 1 & -5 & 3\lambda-4 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{216} (-2) \begin{vmatrix} 11-6\lambda & 54-30\lambda & 0 \\ -7 & -18-6\lambda & 18-6\lambda \\ 1 & 0 & 3\lambda-9 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{matrix} C_3 + C_2 \rightarrow C_3 \\ C_2 + 5C_1 \rightarrow C_2 \end{matrix} \quad \begin{vmatrix} 11-6\lambda & 54-30\lambda & 0 \\ -7 & -18-6\lambda & 18-6\lambda \\ 1 & 0 & 3\lambda-9 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} 54-30\lambda = -6(5\lambda-9) \\ -18-6\lambda = -6(\lambda+3) \\ 18-6\lambda = -6(\lambda-3) = -2 \cdot 3 \cdot (\lambda-3) \\ 3\lambda-9 = 3(\lambda-3) \end{matrix}$$

$$= \frac{1}{216} (-2) \cdot (-6) \cdot 3 \cdot (\lambda-3) \begin{vmatrix} 11-6\lambda & 5\lambda-9 & 0 \\ -7 & \lambda+3 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{6} (\lambda-3) \begin{vmatrix} 11-6\lambda & 5\lambda-9 & 0 \\ -5 & \lambda+3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$L_2 + 2L_3 \rightarrow L_2$$

$$= \frac{1}{6} (\lambda-3) \cdot 1 \cdot [(11-6\lambda)(\lambda+3) + 5(5\lambda-9)] =$$

$$11\lambda + 33 - 6\lambda^2 - 18\lambda + 25\lambda - 45$$

$$-6\lambda^2 + 18\lambda - 12$$

$$(-6)(\lambda^2 - 3\lambda + 2)$$

$$(-6)(\lambda-1)(\lambda-2)$$

$$= -(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$$

$$\begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \lambda_1=1 & \lambda_2=2 & \lambda_3=3 \end{matrix}$$

$$(-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6)$$

Problème 1 Beaulieu 2003 suite

$$E_1: \begin{pmatrix} \frac{11}{6} - 1 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{6} & \frac{17}{6} - 1 & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{5}{6} & \frac{4}{3} - 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & -1 & -2 \\ -7 & 11 & -2 \\ 1 & -5 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 0 & 24 & -12 \\ 0 & -24 & 12 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} x - \frac{1}{2}z = 0 \\ y - \frac{1}{2}z = 0 \end{array}$$

$$x = \frac{1}{2}z \quad z = 2t \Rightarrow x = t \quad y = t \Rightarrow E_1 = \{(t; t; 2t)\} = \underline{\underline{\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle}}$$

$$E_2: \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -7 & 5 & -2 \\ 1 & -5 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & -6 \\ 0 & -30 & -30 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} x + z = 0 \\ y + z = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} x = -z \\ y = -z \end{array} \Rightarrow E_2 = \{(t; t; -t)\} = \underline{\underline{\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle}}$$

$$E_3: \begin{pmatrix} -7 & -1 & -2 \\ -7 & -1 & -2 \\ 1 & -5 & -10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & -10 \\ 0 & -36 & -72 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & -10 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x = 0 \quad y + 2z = 0 \quad y = -2z \quad z = t \quad E_3 = \{(0; -2t; t)\} = \underline{\underline{\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle}}$$

2) Oui car 3 val. propres distinctes (THC p 323, Lay)

$$\Rightarrow \underline{\underline{B^* = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)}} \quad \text{et} \quad \underline{\underline{D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}}$$

$$3) \alpha: \begin{vmatrix} i & 1 & 0 \\ j & 1 & -2 \\ k & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{\alpha: x + y + 2z = 0}} \quad \text{et} \quad \underline{\underline{\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}}$$

#