

Problème 1

Trouver une représentation paramétrique des plans d'équation :

a) $2x - 3y + 4z + 5 = 0$

b) $2x - y + z - 4 = 0$

2) (α): $2x - 3y + 4z + 5 = 0$

• $P(-1; 1; 0) \in \alpha$

• $\vec{n}_\alpha = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \perp \alpha \Rightarrow \vec{d}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{d}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + K \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, K, t \in \mathbb{R}$

b) (β): $2x - y + z - 4 = 0$

• $Q(2; 0; 0) \in \beta$

• $\vec{n}_\beta = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \perp \beta \Rightarrow \vec{d}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{d}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

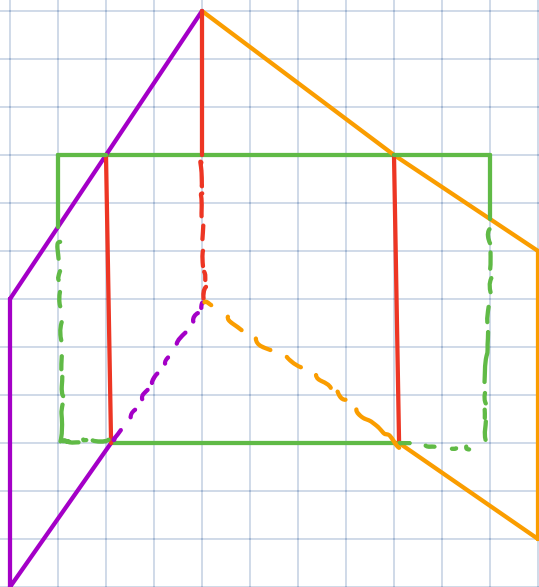
$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + K \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, K, t \in \mathbb{R}$

Problème 2

Montrer que les plans

$$(\alpha) : x - 2y + 1 = 0 \quad (\beta) : 7y - z - 4 = 0 \quad \text{et} \quad (\gamma) : 7x - 2z + 6 = 0$$

sont parallèles à une même droite dont on donnera un vecteur directeur $\vec{d}$.



1ère méthode on passe par les éq. paramétriques

$$\alpha \cap \beta : \begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ 7y - z - 4 = 0 \\ y = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 + 2k \\ z = -4 + 7k \\ y = k \end{cases}$$

$$\alpha \cap \beta : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{R}$$

$$\alpha \cap \gamma : \begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ 7x - 2z + 6 = 0 \\ x = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = 1 + k \\ 2z = 6 + 7k \\ x = k \end{cases}$$

$$\alpha \wedge \gamma: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 3 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 7/2 \end{pmatrix}, \quad v \in \mathbb{R}$$

Comme $\vec{d}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \sim \vec{d}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 7/2 \end{pmatrix}$ les droites sont parallèles.

2^{ème} méthode : avec les vecteurs normaux

$$\rightarrow \vec{h}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \rightarrow \vec{h}_\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \rightarrow \vec{h}_\gamma = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{h}_A \times \vec{h}_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \vec{h}_A \times \vec{h}_C = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 14 \end{pmatrix}, \quad \vec{h}_B \times \vec{h}_C = \begin{pmatrix} -14 \\ -7 \\ -49 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Le vecteur $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ est le vecteur de la droite cherchée.

Problème 3

Déterminer une représentation paramétrique de la droite d'intersection de deux plans α et β , dans les cas suivants :

a) $(\alpha) : x - 2y + z + 3 = 0$ et $(\beta) : x + y - 3z - 2 = 0$

Avec les équations cartésiennes :

$$\begin{cases} (\alpha) : x - 2y + z + 3 = 0 \\ (\beta) : x + y - 3z - 2 = 0 \\ z = t \end{cases} \quad \begin{array}{c|c} x & y \\ \hline \cdot (-1) & \cdot 1 \\ \hline \cdot 1 & \cdot 2 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} 3y - 4z - 5 = 0 \\ 3x - 5z - 1 = 0 \\ z = t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} + \frac{5}{3}t \\ y = \frac{5}{3} + \frac{4}{3}t \\ z = t \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 5/3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Avec le produit vectoriel :

$$\vec{n}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{n}_\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{et un point...}$$

b) $(\alpha) : \begin{cases} x = 3 + k \\ y = 1 + n \\ z = 2 + n \end{cases}$ et $(\beta) : \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 + 2p \\ z = -p + q \end{cases}$

$$(a): \begin{array}{c|cc|cc} x-3 & 1 & 0 & x-3 & 1 \\ y-1 & 0 & 1 & y-1 & 0 \\ z-2 & 0 & 1 & z-2 & 0 \end{array} = 0$$

$$0 + z - 2 + 0 - 0 - 0 - y + 1 = 0$$

$$(\alpha): y - z + 1 = 0$$

$$(P): \begin{array}{ccc|cc} x-4 & 0 & 0 & x-4 & 0 \\ y-2 & 2 & 0 & y-2 & 2 \\ z & -1 & 1 & z & -1 \end{array} = 0$$

$$2x-8=0 \Rightarrow (P): x-4=0$$

$$\vec{h}_\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{h}_\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{h}_\alpha \times \vec{h}_\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

et un point : $P(4;0;1)$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + K \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$4) \quad (PQ): \begin{cases} x = 0 + 5K \\ y = 4 + 6K \\ z = -3 + 2K \end{cases}$$

$$(ABC): x + 2y - 2z - 11 = 0$$

$$PQ \cap \alpha: 5K + 8 + 12K + 6 - 4K - 11 = 0$$

$$13K = -3 \Rightarrow K = -3/13$$

Point d'intersection $I(-15/13; 34/13; -45/13)$

$$b) \quad \vec{DE} = \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \vec{n}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \vec{DE} \cdot \vec{n}_\alpha = 0 \Rightarrow DE \subset \alpha$$

et $D \in \alpha \dots$

c) ...

$$5) \quad \vec{n}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{n}_\beta = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\angle(\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta) = \frac{2 - 6 - 4}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{29}} = \frac{-8}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{29}} \Rightarrow 52,66^\circ$$

$$7) \quad a) \quad (d): (ABC): 3x + 6y - 2z - 22 = 0$$

$$S(D, \alpha) = \frac{|-15 - 24 - 16 - 22|}{7} = \frac{77}{7} = 11$$

$$b) \quad \text{volume} \left| \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 2 & 4 & -7 \\ -2 & 0 & -7 \\ -3 & 6 & 7 \end{vmatrix} \right| = \frac{368}{6}$$

$$c) \quad 90^\circ \quad ; \quad d) \quad 65,13^\circ$$