Vecteurs propres, valeurs propres

Définition 5.1

On considère V un espace vectoriel et $h: V \to V$ un endomorphisme de V.

On appelle **vecteur propre** de h tout vecteur u de V **non nul** pour lequel il existe un nombre réel λ tel que $h(u) = \lambda \cdot u$.

Le nombre λ est appelé la **valeur propre** de h associée à u.

Théorème 5.1

Soit h un endomorphisme de V et λ une valeur propre de h .

L'ensemble $E_\lambda = \left\{ u \in V \mid h(u) = \lambda u \right\}$ est un sous-espace vectoriel de V.

E_λ est appelé le **sous-espace propre** associé à λ .

Exemple

Soit h l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par sa matrice $H = \begin{pmatrix} 24 & 14 \\ -42 & -25 \end{pmatrix}$.

λ est valeur propre de $h \Leftrightarrow \exists\, u = (x\,;y) \neq (0\,;0)$ tel que

$$\begin{pmatrix} 24 & 14 \\ -42 & -25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 24 & 14 \\ -42 & -25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 24 & 14 \\ -42 & -25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \lambda \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 24 & 14 \\ -42 & -25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 24-\lambda & 14 \\ -42 & -25-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Posons $A = \begin{pmatrix} 24-\lambda & 14 \\ -42 & -25-\lambda \end{pmatrix}$.

A est la matrice d'un endomorphisme a de $\mathbb{R}^2$ relativement à une base $\mathcal{B}$.

Dans notre cas, A représente l'endomorphisme $a = h - \lambda \cdot id_{\mathbb{R}^2}$ relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Puisque $u = (x\,;\,y) \neq (0\,;\,0)$, a n'est pas bijectif (car Ker(a) $\neq \{0\}$, donc a n'est pas injectif) ; ainsi, par le théorème 4.4, $\det(A) = 0$ car a n'est pas un automorphisme.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 24-\lambda & 14 \\ -42 & -25-\lambda \end{vmatrix} = (24-\lambda)(-25-\lambda) - 14 \cdot (-42) = \lambda^2 + \lambda - 12 =$$

$$(\lambda+4)(\lambda-3).$$

Donc $\lambda_1 = -4$ et $\lambda_2 = 3$ sont les deux valeurs propres de h, de multiplicité 1.

Déterminons les sous-espaces propres de $\mathbb{R}^2$ associés à h .

1) Pour $\lambda = -4$:

$$u = (x\ ;\ y) \in E_{\lambda_1} = E_1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 24 & 14 \\ -42 & -25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -4 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 24-(-4) & 14 \\ -42 & -25-(-4) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 28 & 14 \\ -42 & -21 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 28x + 14y = 0 \\ -42x - 21y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2x = y \ .$$

Ainsi $E_1 = \left\{ (k\ ; -2k) = k(1\ ; -2) \mid k \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle (1\ ;\ -2) \right\rangle$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ de dimension 1, engendré par le vecteur $(1\ ;\ -2)$.

2) Pour $\lambda = 3$:

$$u = (x\ ;\ y) \in E_{\lambda_2} = E_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 24 & 14 \\ -42 & -25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \ .$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 24-3 & 14 \\ -42 & -25-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 21 & 14 \\ -42 & -28 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 21x + 14y = 0 \\ -42x - 28y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3x = 2y \ .$$

Ainsi $E_2 = \{(2\ ;-3) = k(2\ ;-3) \mid k \in \mathbb{R}\} = \langle (2\ ;-3) \rangle$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ de dimension 1, engendré par le vecteur $(2\ ;-3)$.

Complément

Considérons la base formée des vecteurs propres $\mathcal{B}^*_{\mathbb{R}^2} = ((1\ ;-2),(2\ ;-3))$.

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & H = \begin{pmatrix} 24 & 14 \\ -42 & -25 \end{pmatrix} & & \\
 & (\mathbb{R}^2 , \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}) & \rightarrow & (\mathbb{R}^2 , \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}) & \\
P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} & \uparrow & & \downarrow & P^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\
 & (\mathbb{R}^2 , \mathcal{B}^*_{\mathbb{R}^2}) & \rightarrow & (\mathbb{R}^2 , \mathcal{B}^*_{\mathbb{R}^2}) & \\
 & & H^* = (?) & &
\end{array}
$$

Calculons H^* :

$$H^* = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 24 & 14 \\ -42 & -25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

La matrice H^* de h relativement à la base $\mathcal{B}^*$ est donc $H^* = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Définition 5.2 Polynôme caractéristique d'un endomorphisme.

Soit h est un endomorphisme d'un espace vectoriel V de dimension finie m et H sa matrice relativement à une base $\mathcal{B}$ de V.

On appelle **polynôme caractéristique** de h en la lettre λ le polynôme $c_H(\lambda) = \det(H - \lambda \cdot I_m)$ (de degré m) et **équation caractéristique** l'équation polynomiale (de degré m) $c_H(\lambda) = 0$.

Remarques

1) Puisque $H - \lambda \cdot I_m$ est la matrice de l'endomorphisme $g = h - \lambda \cdot \mathrm{id}_V$ relativement à la base $\mathcal{B}$, le polynôme caractéristique $\det(H - \lambda \cdot I_m) = \det(g)$ est indépendant de la base $\mathcal{B}$ choisie (conformément au paragraphe 4.3) .

2) Par le théorème 5.2, une valeur propre de h est un zéro du polynôme caractéristique ; le nombre de valeurs propres de h est donc, par le théorème fondamental de l'algèbre, inférieur ou égal à la dimension m de V (puisque le polynôme caractéristique est de degré m).