3M8 – Mercredi 22 janvier 2025 Nom & prénom : ....

ALGÈBRE LINÉAIRE 2 – TE 826

Problème	1	2	3	4	Total
Points	10	6	6	6	28
Points obtenus					

Problème 1 (10 points)
Soit W le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs

$$f_1 = (1, -2, 5, -3) \quad , \quad f_2 = (2, 3, 1, -4) \quad \text{et} \quad f_3 = (3, 8, -3, -5)$$

a) Déterminer une base $\mathcal{B}$ de W.

b) Montrer que le vecteur $g = (9, 17, 0, -17) \in W$.

c) Étendre la base $\mathcal{B}$ à une base $\mathcal{B}^\star$ de $\mathbb{R}^4$.

d) Écrire le vecteur g dans la base $\mathcal{B}^\star$.

a) On écrit f_1, f_2 et f_3 dans la base canonique et on cherche le rang de la matrice.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & -3 \\ 2 & 3 & 1 & -4 \\ 3 & 8 & -3 & -5 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1}}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & 5 & -3 \\ 0 & 7 & -9 & 2 \\ 0 & 14 & -18 & 4 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2}{\sim}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & 5 & -3 \\ 0 & 7 & -9 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftarrow \frac{1}{7}L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & -\frac{9}{7} & \frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2}{\sim}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & \frac{17}{7} & -\frac{17}{7} \\ 0 & \boxed{1} & -\frac{9}{7} & \frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$W = \langle (f_1, f_2, f_3) \rangle$, $\dim(W) = 2$ et $\mathcal{B} = (f_1, f_2)$

b) Déterminons α et β tels que $g = \alpha f_1 + \beta f_2$

$$\begin{cases} 9 = \alpha + 2\beta & \cdot 2 & \cdot 3 \\ 17 = -2\alpha + 3\beta & 1 & \cdot(-2) \\ 0 = 5\alpha + \beta & : & -5+5=0 \checkmark \\ -17 = -3\alpha - 4\beta & & +3-20=-17 \checkmark \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 35 = 7\beta \\ -7 = 7\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \alpha = -1 \\ \beta = 5 \end{array}$$

Donc $g = -f_1 + 5f_2$

c) Comme $\dim(W) = 2$, il manque deux vecteurs.

En observant la matrice échelonnée réduite, on peut prendre $e_3 = (0,0,1,0)$ et $e_4 = (0,0,0,1)$

$\mathcal{B}^* = (f_1, f_2, e_3, e_4)$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & \frac{17}{7} & -\frac{17}{7} \\ 0 & \boxed{1} & -\frac{9}{7} & \frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ est échelonnée (pas réduite)

d) $g = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}^*}$

Problème 2 (6 points)
Soit $\mathbb{P}_3[x]$ l'espace vectoriel des polynômes en x de degré inférieur ou égal à 3. Soit les polynômes

$$a = x^3 + 4x^2 - 2x + 3 \quad , \quad b = x^3 + 6x^2 - x + 4 \quad \text{et} \quad c = 3x^3 + 8x^2 - 8x + 7$$

Soit le sous-espace-vectoriel $\mathrm{E} = <(a, b, c)>$ de $\mathbb{P}_3[x]$.

a) Calculer la dimension de E.

b) Trouver une base d'un supplémentaire de E.

a) $\mathcal{B} = (x^3, x^2, x, 1)$

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -8 \\ 7 \end{pmatrix} \text{ écrit dans } \mathcal{B}$$

Echelonnons la matrice dont les lignes sont les vecteurs a, b et c.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 3 \\ 1 & 6 & -1 & 4 \\ 3 & 8 & -8 & 7 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1}}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 4 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 & -2 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2}}{\sim}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & -4 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La famille (a, b, c) est liée et $\dim(E) = 2$

b) Si $\mathbb{P}_3[x] = E \oplus F$, alors $\dim(F) = 2$.

On peut prendre $\mathcal{B}_F = (x, 1)$

Problème 3 (6 points)
Soit H et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ définis ainsi :

$$H = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\} \text{ et } G = \{(t, t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

a) Déterminer une base $\mathcal{B}_1$ de H et une base $\mathcal{B}_2$ de G.

b) Démontrer que $\mathbb{R}^3 = H \oplus G$.

a) $x_3 = -x_1 - x_2 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = \beta \\ x_3 = -\alpha - \beta \end{cases}$

$\mathcal{B}_1 = \big((1,0,-1), (0,1,-1) \big)$, $\dim(H) = 2$

$\mathcal{B}_2 = \big((1,1,1) \big)$, $\dim(G) = 1$

b) Déterminons $H \cap G$.

$\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = t \\ -x_1 - x_2 = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 = t \\ -t - t = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 = t \\ -2t = t \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ x_1 = x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow H \cap G = \{(0,0,0)\}$

Comme $\langle \big((1,0,-1), (0,1,-1), (1,1,1) \big) \rangle = \mathbb{R}^3$

et $H \cap G = \{(0,0,0)\}$, alors $\mathbb{R}^3 = H \oplus G$

Problème 4 (6 points)
Un endomorphisme de g de $\mathbb{R}^2$ est tel que $g\,((1\,;1)) = (0\,;\,1)$ et $g\,((2\,;-1)) = (6\,;\,-10)$

a) Former la matrice G de g relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

b) Déterminer l'image de $u = (-4\,;\,1)$ par l'endomorphisme g.

$g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$g((x,y)) = \overbrace{\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}}^{G} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + cy \\ bx + dy \end{pmatrix}$$

$$g((1,1)) = (0,1) \Rightarrow \begin{cases} a + c = 0 & (1) \\ b + d = 1 & (2) \end{cases}$$

$$g((2,-1)) = (6;-10) \Rightarrow \begin{cases} 2a - c = 6 & (1) \\ 2b - d = -10 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \begin{cases} a + c = 0 \\ 2a - c = 6 \end{cases} \begin{array}{c|c} c & a \\ \cdot 1 & \cdot 2 \\ \cdot 1 & \cdot(-1) \end{array} \Rightarrow \begin{cases} 3a = 6 \\ 3c = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ c = -2 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} b + d = 1 \\ 2b - d = -10 \end{cases} \begin{array}{c|c} d & b \\ \cdot 1 & \cdot 2 \\ \cdot 1 & \cdot(-1) \end{array} \Rightarrow \begin{cases} 3b = -9 \\ 3c = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -3 \\ c = 4 \end{cases}$$

$$\boxed{G = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}}$$

b) $g(u) = g((-4,1)) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 16 \end{pmatrix}$

$\underline{g(u) = (-10;\,16)}$