Intégrales – TE 827

Problème	1	2	3	Total
Points	18	6	20	44
Points obtenus				

Problème 1 (18 points)
Calculer :

a) $\displaystyle\int \frac{x-3}{x^2-6x+1}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{2x-38}{x^2+2x-15}\,dx$

a) $\displaystyle\frac{1}{2}\int \frac{2x-6}{x^2-6x+1}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left|x^2-6x+1\right| + C$ 3

b) $\displaystyle\frac{2x-38}{(x+5)(x-3)} = \frac{A}{x+5} + \frac{B}{x-3} = \frac{A(x-3)+B(x+5)}{(x+5)(x-3)}$

- $x=3$: $-32 = 8B \Rightarrow B=-4$
- $x=-5$: $-48 = -8A \Rightarrow A = 6$ 3

$$\int \frac{2x-38}{x^2+2x-15}\,dx = \int \frac{6}{x+5}\,dx + \int \frac{-4}{x-3}\,dx$$

$$= 6\ln|x+5| - 4\ln|x-3| + C$$

$$= \ln\left(\frac{(x+5)^6}{(x-4)^4}\right) + C$$ 3

c) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+2x+3}\,dx$

d) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2-x+1}\,dx$

c) $$\int \frac{1}{(x+1)^2+2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + c$$ 3

$a=\sqrt{2}$

d) $$\int \frac{\frac{1}{2}(2x-1)+\frac{1}{2}+1}{x^2-x+1}\,dx = \underbrace{\frac{1}{2}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx}_{I_1(x)} + \underbrace{\frac{3}{2}\int \frac{dx}{x^2-x+1}}_{I_2(x)}$$

$$I_1(x) = \frac{1}{2}\ln\left(x^2-x+1\right)+c$$ 3

$$I_2(x) = \frac{3}{2}\int \frac{dx}{(x-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}+1} = \frac{3}{2}\int \frac{dx}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$$

$$\underset{a=\frac{\sqrt{3}}{2}}{\overset{\text{CRM}}{=}} \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{x-\frac{1}{2}}{\sqrt{3}/2}\right)+c$$

$$= \frac{3}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+c$$ 3

$$\int \frac{x+1}{x^2-x+1}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left(x^2-x+1\right) + \frac{3}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+c$$

Problème 2 (6 points)
Soit a et b deux nombres réels. On considère la fonction $f(x)$ définie sur $[0\,;+\infty[$

$$f(x) = \frac{a}{1+e^{-bx}}$$

Déterminer a et b sachant que $f(0) = \frac{1}{2}$ et que la tangente à la courbe $y = f(x)$ issue de $A(0\,;\,0.5)$ passe par le point $B(10\,;\,1)$.

$$f(0) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{a}{1+1} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{a = 1}$$ 2

Pente de la tangente :

$$m = \frac{1-0{,}5}{10-0} = \frac{0{,}5}{10} = \frac{1}{20} \qquad \text{Donc } f'(0) = \frac{1}{20}$$

$$f'(x) = \frac{b\,e^{-bx}}{(1+e^{-bx})^2} \Rightarrow f'(0) = \frac{b}{(1+1)^2} = \frac{b}{4} = \frac{1}{20} \Rightarrow \boxed{b = \frac{1}{5}}$$

$$u = 1+e^{-bx}, \quad u' = -b\,e^{-bx}$$ 4

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-u'}{u^2}$$

Problème 3 (20 points)
On considère la fonction f donnée par

$$f(x) = (2x^2 + 5x + 2) \cdot e^{-x}$$

a) Déterminer l'ensemble de définition de f.

b) Calculer les éventuels zéros de f.

c) Etudier le signe de f.

d) Calculer la dérivée f' de f et donner le tableau des variations de f.

e) Donner les coordonnées des éventuels extrema de f.

f) Déterminer, par calculs, les éventuelles asymptotes horizontales de f.

g) Représenter sur une page A4 (unité : 2 carrés) les éventuelles asymptotes horizontales de f ainsi que le graphe de cette fonction f à l'aide des informations récoltées ci-dessus.

a) $ED(f) = \mathbb{R}$ 1

b) zéros de f : $2x^2+5x+2 = 0$

$(2x+1)(x+2) = 0$

$x = -\frac{1}{2}$ et $x = -2$ 2

c)

x		-2		$-\frac{1}{2}$	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

2

d) $f'(x) = (4x+5)e^{-x} - (2x^2+5x+2)e^{-x}$

$= (4x+5-2x^2-5x-2)e^{-x}$

$= (-2x^2-x+3)e^{-x} = -(2x^2+x-3)e^{-x}$

$= -(2x+3)(x-1)e^{-x}$ 2

zéros de $f'(x)$: $x = -\frac{3}{2}$ et $x = 1$

x		$-\frac{3}{2}$		1	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$\boxed{\text{min}}$	$\nearrow$	$\boxed{\text{max}}$	$\searrow$

3

e) min : $\left(-\frac{3}{2} ; -4.5\right)$ $\quad$ $\left(-\sqrt{e^3} \cong -4.5\right)$

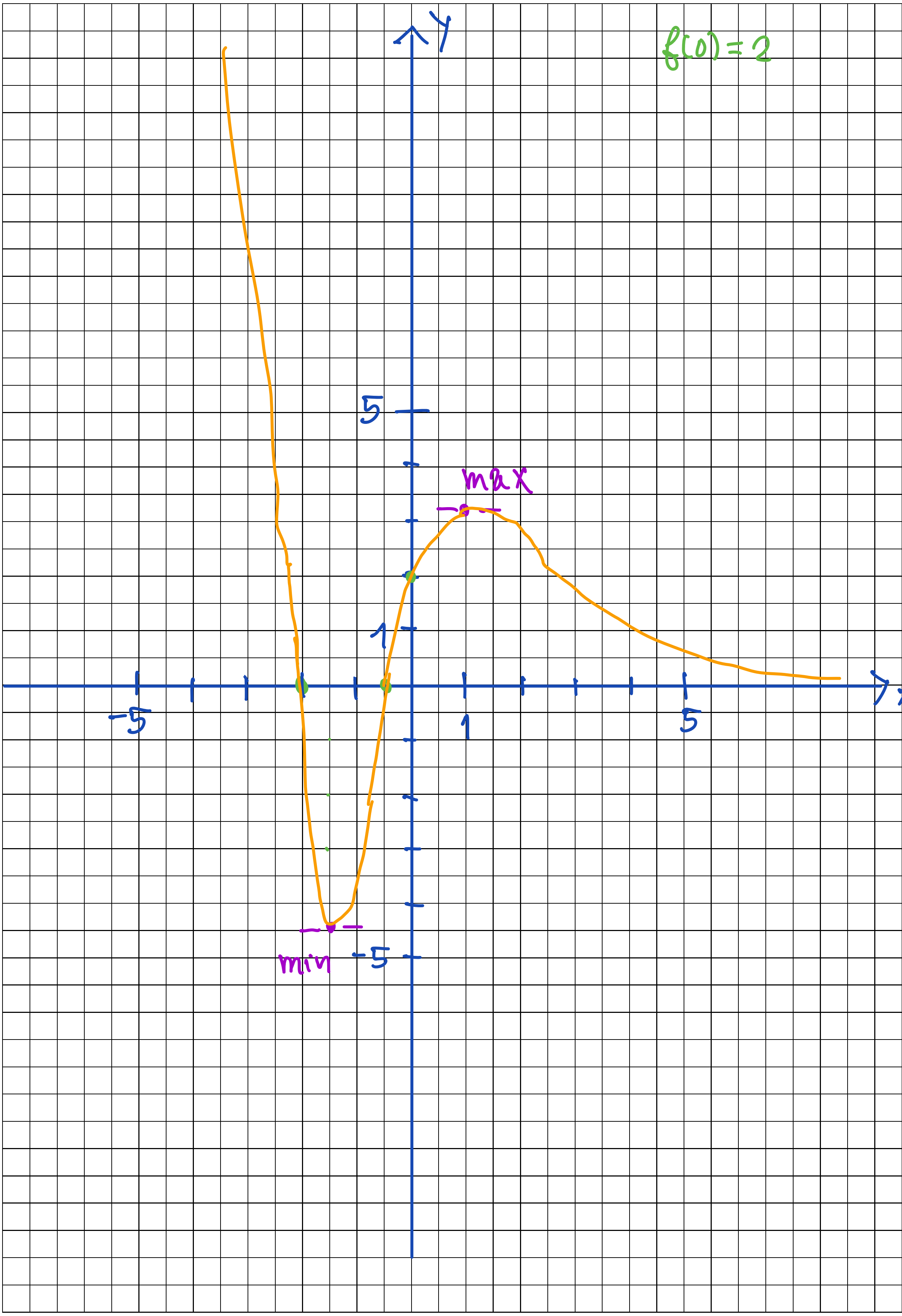
max : $(1 ; 3.1)$ $\quad$ $\left(\frac{9}{e} \cong 3,1\right)$ 2

f) <u>AHD</u>: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x^2+5x+2}{e^x} \underset{\text{"}\frac{+\infty}{+\infty}\text{"}}{\overset{BH}{=}} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{4x+5}{e^x} \underset{\text{"}\frac{+\infty}{+\infty}\text{"}}{\overset{BH}{=}}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{4}{e^x} = 0 \Rightarrow$ <u>$y = 0$ est une AHD</u> 2

<u>AHG</u>: $\lim\limits_{x \to -\infty} (2x^2+5x+2)e^{-x} = \text{"}+\infty \cdot +\infty\text{"} = \text{"}+\infty\text{"}$

<u>aucune AHG</u> 2



4