3M8 – Jeudi 20 mars 2025 Nom & prénom : ........................

# ALGÈBRE LINÉAIRE 3 – TE 829

| Problème | 1 | 2 | 3 | 4 | Total |
|---|---|---|---|---|---|
| Points | 4 | 6 | 11 | 19 | 40 |
| Points obtenus | | | | | |

**Problème 1** (4 points)
Calculer l'inverse de la matrice H.

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -11 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & -6 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -14 & 11 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & -6 & 1 \end{array}\right)$$

$$H^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 1 \\ -14 & 11 & -2 \\ 8 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour info : $|H| = -1$

**Problème 2** (6 points)
Soit $A$ la matrice de l'application linéaire $f$ relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

$$A = \begin{pmatrix} -8 & -2 & -9 \\ 6 & 4 & 8 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Soit $u = (2;\ 1;\ -2)$ le vecteur de $\mathbb{R}^3$.

a) Le vecteur $u$ appartient-il à $\ker(f)$ ? Justifier.

b) Le vecteur $u$ appartient-il à $\mathrm{Im}(f)$ ? Justifier.

a) $$\begin{pmatrix} -8 & -2 & -9 \\ 6 & 4 & 8 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

comme $A \cdot u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow f(u) = 0 \Rightarrow u \in \mathrm{Ker}(f)$

b) $u \in \mathrm{Im}(f) \Leftrightarrow \exists\, x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{pmatrix} -8 & -2 & -9 \\ 6 & 4 & 8 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 3 & 2 & 4 & \frac{1}{2} \\ 8 & 2 & 9 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

donc $\begin{cases} x = -t - \frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{2}t + 1 \\ z = t \end{cases}$ Si $t = 0$ $\underline{v = \left(-\frac{1}{2};\ 1;\ 0\right)}$

donc $\underline{f(v) = u}$

$$\begin{pmatrix} -8 & -2 & -9 \\ 6 & 4 & 8 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Im}(f) = \left\langle \big( (-8,6,4), (-2,4,0), (-9,8,4) \big) \right\rangle$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 9 & -8 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 4 & -3 & -2 \\ 9 & -8 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 10 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Im}(f) = \left\langle \big( \underbrace{\underset{w_1}{(1,-2,0)}, \underset{w_2}{(0,5,-2)}}_{\text{base de } \mathrm{Im}(f)} \big) \right\rangle$$

$$u = 2w_1 + w_2 \quad \Rightarrow \quad u \in \mathrm{Im}(f)$$

**Problème 3** (11 points)

Soit $\mathbb{P}_2[t]$ l'ensemble des polynômes en $t$ de degré inférieur ou égal à 2.

Soit $d$ l'endomorphisme de $\mathbb{P}_2[t]$ tel que

$$d(P) = t \cdot P' - P$$

où $P' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} P$ est le polynôme dérivé de $P$ par rapport à $t$.

a) Calculer $d(-2\,t^2 + 8\,t - 3)$.

b) Écrire la matrice $D$ associée à $d$ dans la base canonique $\mathbf{B} = (t^2,\ t,\ 1)$ de $\mathbb{P}_2[t]$ .

c) Déterminer le noyau de $d$ et en donner une base.

d) Déterminer l'image de $d$ et en donner une base.

a) $d(-2t^2+8t-3) = t(-4t+8) - (-2t^2+8t-3)$

$= -4t^2 + 8t + 2t^2 - 8t + 3 = \underline{-2t^2 + 3}$

2

b) $d(t^2) = t \cdot 2t - t^2 = t^2$

$d(t) = t \cdot 1 - t = 0 \Rightarrow D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$d(1) = 1 \cdot 0 - 1 = -1$

3

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a = c = 0,\ b \in \mathbb{R}$

où $P = at^2 + bt + c$

$\mathrm{Ker}(d) = \{ bt \mid b \in \mathbb{R} \} = \langle (0,1,0) \rangle$

base de $\mathrm{Ker}(d) = ((0,1,0))$

3

d) Comme $\dim(\mathrm{Ker}(d)) = 1$, alors $\dim(\mathrm{Im}(d)) = 2$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3

donc $\mathrm{Im}(d) = \langle \underbrace{(1,0,0),(0,0,1)}_{\text{base de } \mathrm{Im}(d)} \rangle$

**Problème 4** (21 points)

Beaulieu 2007

Soit $h$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ :

$$h(x\,;\,y;\,z) = (x + 10\,y + 10\,z;\ 10\,x + y + 10\,z;\ 10\,x + 10\,y + z)$$

a) Déterminer la matrice $H$ de $h$

b) Calculer l'image par $h$ de la droite $x = y = z$

c) Calculer $\text{Im}(h)$ et $\ker(h)$

d) Montrer que la matrice $H$ est diagonalisable ; donner la matrice diagonale $H'$ et la matrice de passage $P$ associée.

a) $B = \left( \underbrace{(1,0,0)}_{e_1}, \underbrace{(0,1,0)}_{e_2}, \underbrace{(0,0,1)}_{e_3} \right)$

$h(e_1) = (1, 10, 10)$

$h(e_2) = (10, 1, 10)$

$h(e_3) = (10, 10, 1)$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 10 \\ 10 & 1 & 10 \\ 10 & 10 & 1 \end{pmatrix}$$

2

b) $h(x,x,x) = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 10 \\ 10 & 1 & 10 \\ 10 & 10 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} = 21x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

2

Image de la droite : $< \left( (1,1,1) \right) >$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 10 & 10 \\ 10 & 1 & 10 \\ 10 & 10 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 10 & 10 \\ 0 & -99 & -90 \\ 0 & -90 & -99 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 10 & 10 \\ 0 & 11 & 10 \\ 0 & 10 & 11 \end{pmatrix}$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 11 & 10 \\ 0 & 10 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 10 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 21 \end{pmatrix}$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{Ker}(h) = \{0\} = \{(0,0,0)\}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Im}(h) = \mathbb{R}^3$$

4

d) $$C_H(t) = \begin{vmatrix} 1-t & 10 & 10 \\ 10 & 1-t & 10 \\ 10 & 10 & 1-t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -9-t & 9+t & 0 \\ 10 & 1-t & 10 \\ 10 & 10 & 1-t \end{vmatrix}$$

$$= (9+t) \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 10 & 1-t & 10 \\ 10 & 10 & 1-t \end{vmatrix} = (9+t) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 11-t & 1-t & 10 \\ 20 & 10 & 1-t \end{vmatrix}$$

$$= -(9+t) \begin{vmatrix} 11-t & 10 \\ 20 & 1-t \end{vmatrix} = -(9+t)\left[(11-t)(1-t) - 200\right]$$

$$= -(9+t)\left(t^2 - 12t - 189\right) = -(t+9)(t+9)(t-21)$$

$$= -(t+9)^2(t-21)$$

3

<u>$E_{21}$</u> :

$$\begin{pmatrix} -20 & 10 & 10 \\ 10 & -20 & 10 \\ 10 & 10 & -20 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_{21} = \langle ((1,1,1)) \rangle$$

3

$\underline{E_{-9}}$ : $\begin{pmatrix} 10 & 10 & 10 \\ 10 & 10 & 10 \\ 10 & 10 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \quad x + y + z = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -y - z$

$\underline{E_{-9} = \left\langle \big( (1,-1,0),\ (1,0,-1) \big) \right\rangle}$ 3

Comme $mult(21) = dim(E_{21})$ et $mult(-9) = dim(E_{-9})$

$h$ est diagonalisable.

$H' = \begin{pmatrix} 21 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ 2