

Problème	1	2	Total
Points	14	17	31
Points obtenus			

Problème 1 (14 points)

Beaulieu 2016

On munit l'espace $\mathbb{R}^3$ de la base canonique notée $\mathbf{B} = (e_1, e_2, e_3)$
Soit l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x; y; z) = (-2x; 3x + y + 3z; 3x + 3y + z)$$

- a) Déterminer la matrice A de cette application relativement à la base $\mathbf{B}$.
- b) Montrer que f est bijective.
- c) Déterminer une base du sous-espace vectoriel $W = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid f(u) = -2u\}$ de $\mathbb{R}^3$.
- d) Calculer le polynôme caractéristique de A .
- e) Déterminer une base $\mathbf{B}'$ relativement à laquelle la matrice de f est diagonale, puis donner la matrice du changement de base de $\mathbf{B}$ à $\mathbf{B}'$.

Problème 2 (17 points)

Bugnon 2014

On donne l'endomorphisme h suivant de $\mathbb{R}^3$ par sa matrice relativement à une base de $\mathbb{R}^3$:

$$H = \begin{pmatrix} -1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ où } a \text{ est un nombre réel.}$$

- a) Pour quelle(s) valeur(s) de a la matrice H est-elle inversible ?
- b) On pose $a = 2$. Calculer H^{-1} dans ce cas.
- c) Calculer les valeurs propres de h en fonction de a .
- d) On pose $a = 1$. Donner $\ker(h)$ et $\text{Im}(h)$ ainsi que leur dimension.

Problème 1

$$2) \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Comme f est un endomorphisme

f est inj $\Leftrightarrow f$ est surj $\Leftrightarrow f$ est bijective

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (-2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2 \cdot [1-9] = 16$$

donc f est bijective $\Rightarrow$ f est injective

$$c) \quad f(u) = -2u$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \\ -2z \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x & = -2x \\ 3x + y + 3z & = -2y \\ 3x + 3y + z & = -2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y + 3z & = -2y \\ 3x + 3y + z & = -2z \end{cases} \Leftrightarrow 3x + 3y + 3z = 0$$

$\Leftrightarrow x + y + z = 0$, c'est un plan.

$$\underline{B_W = ((1, 0, -1), (0, 1, -1))}$$

$$d) \quad C_A(t) = \begin{vmatrix} -2-t & 0 & 0 \\ 3 & 1-t & 3 \\ 3 & 3 & 1-t \end{vmatrix} = -(2+t) \begin{vmatrix} 1-t & 3 \\ 3 & 1-t \end{vmatrix}$$

$$= -(2+t) \left[(1-t)^2 - 9 \right] = -(2+t) (1-t-3) (1-t+3)$$

$$= -(2+t) (-t-2) (-t+2) = -(t+2)^2 (t-4)$$

$$\underline{C_A(t) = -(t+2)^2 (t-4)}$$

e) E_{-2} : O_n a $E_{-2} = W$

$$E_{-2} = \langle (1, 0, -1), (0, 1, -1) \rangle$$

$$\underline{E_4}: \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 3 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases}$$

$$E_4 = \langle (0, 1, 1) \rangle$$

$$B' = \left((1, 0, -1), (0, 1, -1), (0, 1, 1) \right)$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Problème 2

2) H est inversible $\Leftrightarrow |H| \neq 0$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & a \\ a & -1 \end{vmatrix} = 1 - a^2 = (1-a)(1+a)$$

H est inversible $\Leftrightarrow a \in \mathbb{R} - \{\pm 1\}$

$$b) \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -1 & \frac{1}{3} \end{array} \right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -1 & \frac{1}{3} \end{array} \right)$$

$$H^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & -1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$c) C_H(t) = \begin{vmatrix} -1-t & 1 & a \\ 0 & 1-t & 0 \\ a & 1 & -1-t \end{vmatrix}$$

$$= (1-t) \begin{vmatrix} -1-t & a \\ a & -1-t \end{vmatrix} = (1-t) \left[(1+t)^2 - a^2 \right]$$

$$\underline{C_A(t) = (1-t)(t+1-a)(t+1+a)}$$

les valeurs propres : $t_1 = 1$, $t_2 = -1+a$, $t_3 = -1-a$

$$d) \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\text{Ker}(h) = \{ (x, 0, x) \mid x \in \mathbb{R} \} = \langle (1, 0, 1) \rangle$$

$$\dim(\text{Ker}(h)) = 1$$

$$\text{On a } \dim(\text{Im}(h)) = 3 - 1 = 2$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{de rang 2}$$

$$\Rightarrow \text{Im}(h) = \langle (-1, 0, 1), (1, 1, 1) \rangle$$