04.02.25

2.3.18 Étudier les fonctions suivantes :

c) $f(x) = (x^2 - 4x + 4)e^x = (x-2)^2 e^x$

1) $ED(f) = \mathbb{R}$

2) Parité : $f(-x) = \left((-x)^2 - 4\cdot(-x) + 4\right) e^{-x} = \left(x^2 + 4x + 4\right) e^{-x} \begin{cases} \neq -f(x) \\ \neq f(x) \end{cases}$ ni paire ni impaire

3) Signe de $f(x)$:

x		2	
$f(x)$	$+$	0	$+$

4) AV : aucune

AH à droite : $\lim\limits_{x \to +\infty} (x-2)^2 e^x = "+\infty" \cdot "+\infty" = +\infty$ pas de AHD

AO à droite : $m = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(x^2 - 4x + 4)}{x} \cdot e^x$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\left(x - 4 + \frac{4}{x}\right) e^x}{1} = "+\infty" \cdot "+\infty"$ pas de AOD

AH à gauche : $\lim\limits_{x \to -\infty} \underbrace{(x-2)^2 e^x}_{"+\infty" \cdot "0"} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{(x-2)^2}{e^{-x}} \overset{BH}{\underset{"\frac{+\infty}{+\infty}"}{=}}$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2(x-2)}{-e^{-x}} \overset{BH}{\underset{"\frac{-\infty}{-\infty}"}{=}} \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2}{e^{-x}} \underset{"\frac{2}{+\infty}"}{=} 0_+ \Rightarrow AHG : y = 0$

5) $f(x) = (x-2)^2 e^x$

$$f'(x) = 2(x-2)e^x + (x-2)^2 e^x = (x-2)e^x\left[2 + x - 2\right] = x(x-2)e^x$$

$u = (x-2)^2$, $u' = 2(x-2)$

$v = e^x$, $v' = e^x$

$(uv)' = u'v + uv'$

Tableau de la croissance :

x		0		2	
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	$\boxed{\text{max}}$	$\searrow$	$\boxed{\text{min}}$	$\nearrow$

Extrema :

max $(0 ; 4)$

min $(2 ; 0)$

6) $f'(x) = x(x-2)e^{x} = (x^2-2x)e^{x}$

$u = (x^2-2x)$; $u' = 2x-2 = 2(x-1)$

$v = e^{x}$; $v' = e^{x}$

$f''(x) = 2(x-1)e^{x} + (x^2-2x)e^{x} = (2x-2+x^2-2x)e^{x}$

$= (x^2-2)e^{x} = (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})e^{x}$

<u>Tableau de la courbure :</u>

x		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$	
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	convexe	$\boxed{pi}$	concave	$\boxed{pi}$	convexe

$f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2}-2)^2 e^{\sqrt{2}}$

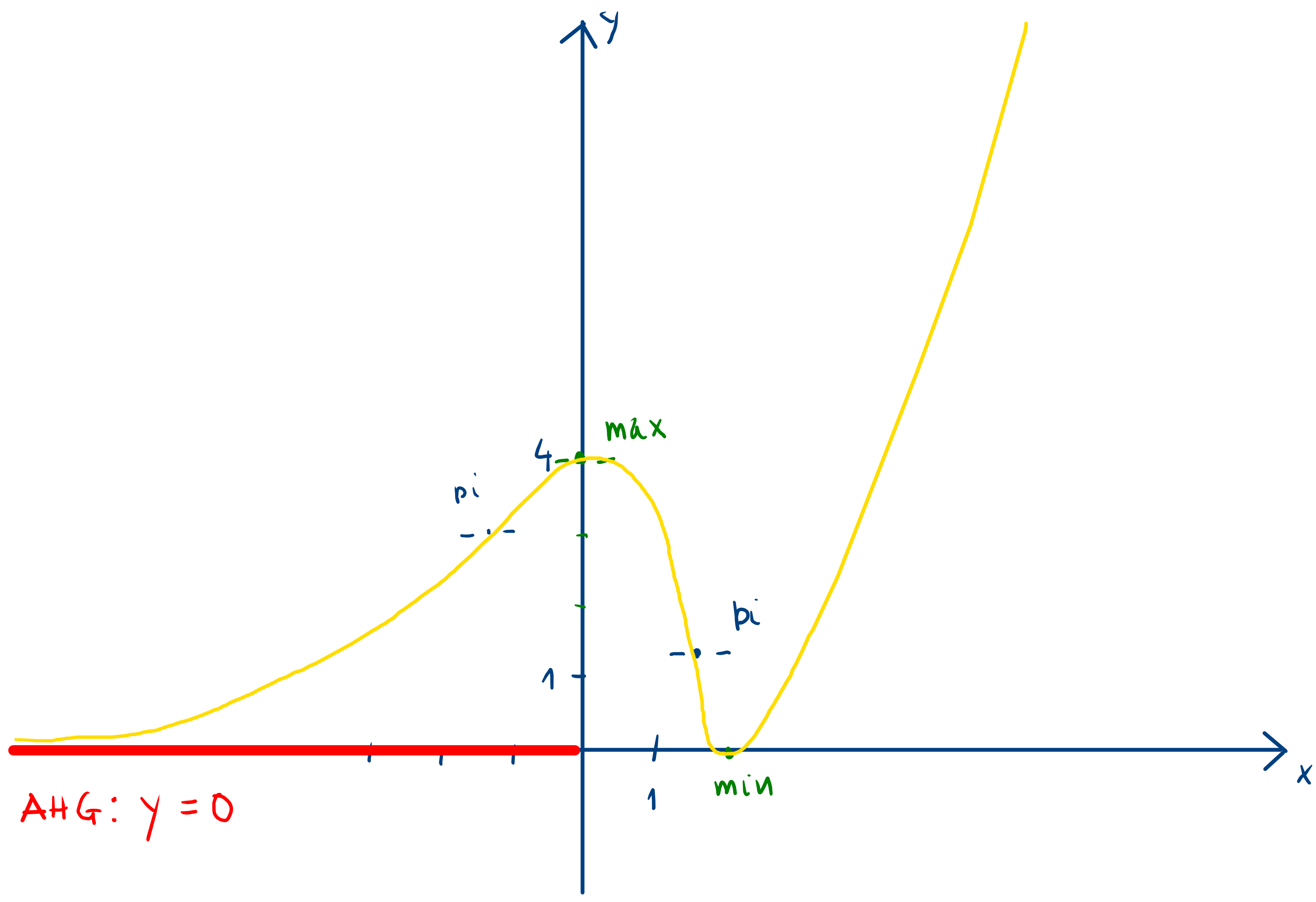
$= (2-4\sqrt{2}+4)e^{\sqrt{2}} = (6-4\sqrt{2})e^{\sqrt{2}}$

$f(-\sqrt{2}) = (-\sqrt{2}-2)^2 e^{-\sqrt{2}} =$

$= (2+4\sqrt{2}+4)e^{-\sqrt{2}} = (6+4\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}}$

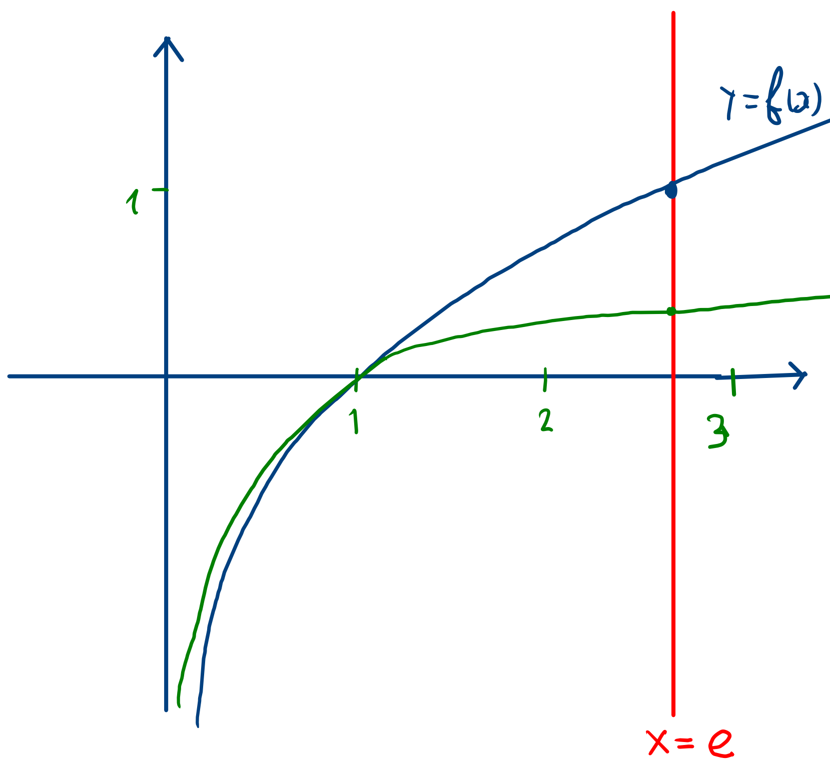
PI : $\left(-\sqrt{2} ; \underbrace{(6+4\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}}}_{2,83}\right)$ et $\left(\sqrt{2} ; \underbrace{(6-4\sqrt{2})e^{\sqrt{2}}}_{1,41}\right)$

$(-1,4 ; 2,8)$ $(1,4 ; 1,4)$



y
x
max
4
pi
bi
1
1
min
AHG: y = 0

2.3.26 Soit les fonctions $f(x) = \ln(x)$ et $h(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$. Montrer que le graphe de h partage la surface délimitée par le graphe de f, l'axe Ox et la droite $x = e$ en deux domaines d'aires égales.



$ED(f) = \mathbb{R}_+^*$

$ED(h) = \mathbb{R}_+^*$

$h(e) = \frac{1}{e} = \frac{1}{2{,}7} \cong 0{,}37$

$$\boxed{\int_1^e \ln(x)\,dx \overset{\text{CRM}}{=} x\ln(x) - x\Big|_1^e = (e-e) - (0-1) = 1}$$

$$\int_1^e \frac{\ln(x)}{x}\,dx = \ln^2(x)\Big|_1^e - \int_1^e \frac{\ln(x)}{x}\,dx$$

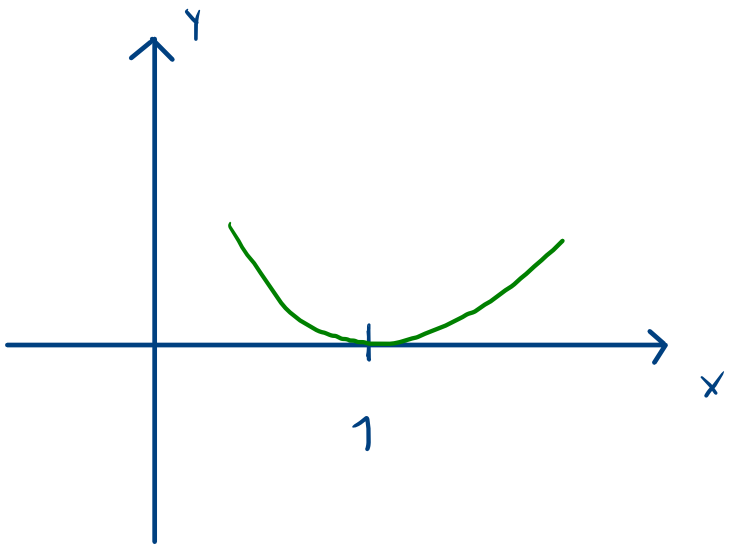
Par parties : $\int (u'v) = uv - \int uv'$

$u = \ln(x)$; $u' = \frac{1}{x}\,dx$

$v = \ln(x)$; $v' = \frac{1}{x}\,dx$

$$\Rightarrow \quad 2\int_1^e \frac{\ln(x)}{x}\,dx = 1 - 0 = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\int_1^e \frac{\ln(x)}{x}\,dx = \frac{1}{2}}$$

2.3.27 Soit la fonction $f(x) = (x^2 + ax + b)e^x$. Déterminer a et b afin que le graphe de la fonction f soit tangent à l'axe Ox en $x = 1$.



$$f(1) = 0 \Rightarrow (1 + a + b)\cancel{e} = 0$$

$$f'(1) = 0 \Rightarrow (2 + a)\cancel{e} + (1 + a + b)\cancel{e} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b = -1 \\ 2a + 3 + b = 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = (2x + a)e^x + (x^2 + ax + b)e^x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b = -1 & \cdot(-1) \\ 2a + b = -3 & \cdot 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \end{cases}$$

i) $\int \frac{dx}{x^3+1} = \int \frac{dx}{(x+1)(x^2-x+1)}$

$$\frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$$

$$2x^2 - 2x + 1 = 2\left(\underbrace{x^2 - x}_{} + \frac{1}{2}\right) = 2\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right)$$

$\Delta < 0$

$$= 2\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\right)$$