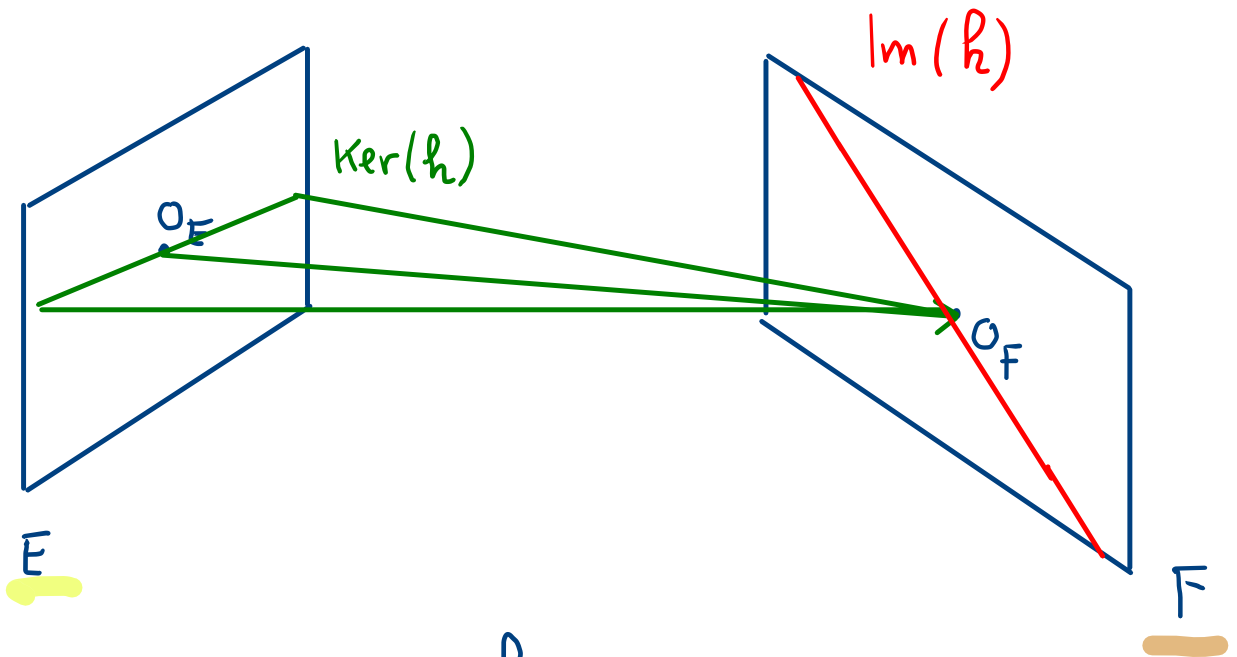
Noyau et image d'une application linéaire

05.02.25



Soit $E \xrightarrow{h} F$ une application linéaire

Le noyau de h est le sous-ensemble de E défini par

$$\mathrm{Ker}(h) = \{ u \in E \mid h(u) = 0_F \}$$

L'image de h est le sous-ensemble de F défini par

$$\mathrm{Im}(h) = h(E) = \{ w \in F \mid \exists\, u \in E \text{ avec } h(u) = w \}$$

__Exemple__ Soit l'application linéaire :

$$h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$h\big((x,y,z)\big) = \big(x+z\,,\,y-z\big)$$

1) Déterminons $\mathrm{Ker}(h)$:

$$h\big((x,y,z)\big) = (0,0) \Rightarrow \begin{cases} x \phantom{{}+y} + z = 0 \\ \phantom{x+{}} y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = z \end{cases}$$

$$\mathrm{Ker}(h) = \big\langle \big((-1;1;1) \big) \big\rangle = \big\langle \big((1;-1;-1) \big) \big\rangle$$

2) Déterminons $\mathrm{Im}(h)$:

Soit $(a,b) \in \mathrm{Im}(h) \Leftrightarrow \exists\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $h\big((x,y,z)\big) = (a,b)$

On résout : $\begin{cases} x + z = a \\ y - z = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a - z \\ y = b + z \end{cases}$

$$h\big((a-z,\,b+z,\,z)\big) = (a,b) \Rightarrow \mathrm{Im}(h) = \mathbb{R}^2$$

Théorème

Soit $h : E \to F$ une application linéaire

1) $\mathrm{Ker}(h)$ est un ss-ev de E.

2) $\mathrm{Im}(h)$ est un ss-ev de F.

3) Si E est de dimension finie, alors

$$\dim(\mathrm{Ker}(h)) + \dim(\mathrm{Im}(h)) = \dim(E)$$

Dém : 1) Soit $u, v \in \mathrm{Ker}(h)$, alors $h(u) = h(v) = 0_F$

- $h(u+v) = h(u) + h(v) = 0_F + 0_F = 0_F \Rightarrow u+v \in \mathrm{Ker}(h)$
- Si $\lambda \in \mathbb{R}$, $h(\lambda u) = \lambda \cdot h(u) = \lambda \cdot 0_F = 0_F \Rightarrow \lambda u \in \mathrm{Ker}(h)$

2) Soit $s, t \in \mathrm{Im}(h)$. $\exists\, u, v \in E$ tel que $h(u) = s$ et $h(v) = t$.

$$s + t = h(u) + h(v) = h(u+v) \in \mathrm{Im}(h)$$

$$\lambda s = \lambda h(u) = h(\lambda u) \in \mathrm{Im}(h)$$

3) Sans démo.

Théorème

Soit $h : E \to F$ une application linéaire

1) h est injective $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Ker}(h) = \{0_E\}$

2) Si E et F ont la même dimension, alors les conditions suivantes sont équivalentes

   a) h est injective
   b) h est surjective
   c) h est bijective

Dém : 1)

- h injective $\Rightarrow$ $\mathrm{Ker}(h) = \{0_E\}$

  $h(0_E) = 0_F$. Soit $u \in E$ tel que $h(u) = 0_F$, comme h est injective $u = 0_E$

  donc $\mathrm{Ker}(h) = \{0_E\}$

- $\mathrm{Ker}(h) = \{0_E\}$ $\Rightarrow$ h est injective

  Soit $u, v \in E$ tels que $h(u) = h(v)$. Donc $h(u) - h(v) = 0_F \Rightarrow h(u-v) = 0_F$

  donc $u - v \in \mathrm{Ker}(h)$, donc $u - v = 0_E$ et $u = v$. Donc h est injective.

2) Sans démo.

1.3.9 Déterminer le noyau et l'image d'un homomorphisme h de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^3$ dont la matrice H relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ est $H = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -\frac{5}{2} & 5 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$.

$$h((x,y)) = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -\frac{5}{2} & 5 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left(2x-4y,\ -\frac{5}{2}x+5y,\ 3x-6y\right)$$

1) $\mathrm{Ker}(h)$:

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\begin{cases} 2x-4y = 0 \\ -\frac{5}{2}x+5y = 0 \\ 3x-6y = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x-2y = 0 \\ x-2y = 0 \\ x-2y = 0 \end{cases} \sim x = 2y$$

$L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1$

$L_3 \leftarrow \frac{1}{3}L_3$

$L_2 \leftarrow -\frac{2}{5}L_2$

$$\mathrm{Ker}(h) = \langle (2;1) \rangle = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 2y\}$$

$$= \{(2k,k) \mid k \in \mathbb{R}\}$$

2) $$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -\frac{5}{2} & 5 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Im}(h) = \left\langle \left((2; -\tfrac{5}{2}; 3) \right) \right\rangle = \left\langle \left((4; -5; 6) \right) \right\rangle$$