Vecteurs, valeurs propres

05. 03. 25

Définition Soit $h : V \longrightarrow V$ un endomorphisme.

On appelle <u>vecteur propre</u> de h tout vecteur v non nul tel que $h(v) = \lambda v$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

Le nombre λ s'appelle la <u>valeur propre</u> de h associée à v.

Exemple

On donne un endomorphisme h par sa matrice relativement à la base canonique $\mathcal{B}$: $H = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Déterminons les valeurs propres et les vecteurs propres de h.

Déterminons $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tel que $h(v) = \lambda v$.

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3x - 4y = \lambda x \\ 2x + 3y = \lambda y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-3-\lambda)x - 4y = 0 \\ 2x + (3-\lambda)y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3-\lambda & -4 \\ 2 & 3-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} -3-\lambda & -4 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (-3-\lambda)(3-\lambda) + 8 = 0$$

$\Leftrightarrow \lambda^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$ ou $\lambda = -1$ sont les valeurs propres de h.

$C_H(\lambda) = \lambda^2 - 1$ est le polynôme caractéristique de la matrice H.

Déterminons les vecteurs propres associés à chaque valeur propre.

1) $\underline{\lambda = 1}$: $h(v) = v$

$$\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -4x - 4y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases} \iff x + y = 0$$

Un vecteur propre $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} -7 \\ 7 \end{pmatrix}$

En effet : $\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -7 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 7 \end{pmatrix}$

On définit le sous-espace propre à la valeur propre $\lambda = 1$

$$E_1 = \langle ((1, -1)) \rangle = \underbrace{\{ (x, -x) \mid x \in \mathbb{R} \}}_{\text{pas bô !}}$$

2) $\underline{\lambda = -1}$:

$$\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -2x - 4y = 0 \\ 2x + 4y = 0 \end{cases} \iff x + 2y = 0$$

Un vecteur propre $v = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $h(-2;1) = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$E_{-1} = \langle \left((-2;1) \right) \rangle$ sous espace propre par rapport à la valeur propre $\lambda = -1$.

Déterminons la matrice H^* par rapport à la base composée des vecteurs propres :

$$B^* = \left((1,-1) , (-2,1) \right)$$

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{R}^2, B) \arrow[r, "H"] & (\mathbb{R}^2, B) \arrow[d, "P^{-1}"] \\
(\mathbb{R}^2, B^*) \arrow[u, "P"] \arrow[r, "H^*"] & (\mathbb{R}^2, B^*)
\end{tikzcd}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$H^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice

Déterminer les valeurs propres, les sous-espaces propres de

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 \\ -1 & 5 & -1 \\ 5 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

On détermine le polynôme caractéristique :

$$C_H(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 4 & 4 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 5 & -5 & 1-\lambda \end{vmatrix} \underset{C_1 \leftarrow C_1 + C_2}{=} \begin{vmatrix} -\lambda+4 & 4 & 4 \\ -\lambda+4 & 5-\lambda & -1 \\ 0 & -5 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-\lambda+4) \begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 1 & 5-\lambda & -1 \\ 0 & -5 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{=} (-\lambda+4) \begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1-\lambda & -5 \\ 0 & -5 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-\lambda+4) \begin{vmatrix} 1-\lambda & -5 \\ -5 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-\lambda+4)\left[(1-\lambda)^2 - 25\right] = (-\lambda+4)(\lambda^2 - 2\lambda - 24)$$

$$C_H(\lambda) = (-\lambda+4)(\lambda-6)(\lambda+4)$$

1) $\underline{\lambda = 4}$

$$\begin{pmatrix} -4 & 4 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \\ 5 & -5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 5 & -5 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases} \qquad \underline{E_4 = \langle \left((1, 1, 0) \right)}$$

2) $\underline{\lambda = 6}$

$$\begin{pmatrix} -6 & 4 & 4 \\ -1 & -1 & -1 \\ 5 & -5 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -3x + 2y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -z \end{cases}$$

$$\underline{E_6 = \langle \left((0; 1; -1) \right) \rangle}$$

3) $\underline{\lambda = -4}$

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ -1 & 9 & -1 \\ 5 & -5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -9 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -10 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\underline{E_{-4} = \langle \left((1; 0; -1) \right) \rangle}$$

Dans la base $\mathcal{B}^* = \big((1,0,-1),\ (1,1,0),\ (0,1,-1) \big)$

λ : -4 $\quad$ 4 $\quad$ 6

h est diagonalisable dans $\mathcal{B}^*$: $H^* = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$