06.03.25

Valeurs propres, vecteurs propres

Soit $f : E \longrightarrow E$ un endomorphisme

1) f admet une valeur propre nulle si et seulement si f n'est pas bijective.
Dans ce cas $E_0 = \mathrm{Ker}(f)$.

2) f admet la valeur propre 1, alors E_1 est l'ensemble des vecteurs invariants par f

3) Si E est de dimension n, alors f admet au plus n valeurs propres.

4) Si f admet $k \leq n$ valeurs propres distinctes, alors il existe k vecteurs propres linéairement indépendants

5) Si f admet n valeurs propres distinctes, alors en prenant un vecteur propre associé à chaque valeur propre, on forme une base de E.

6) Si f est triangulaire, alors les éléments de la diagonale sont les valeurs propres de f.

1.5.1 Le scalaire $\lambda = 2$ est-il une valeur propre de la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$? $= H$

Existe-t-il $v \in \mathbb{R}^2$ tel que $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 2x \\ 3x + 8y = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 0 \\ 3x + 6y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x + 2y = 0$$

$E_2 = \langle ((2;-1)) \rangle$ oui

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

On peut aussi chercher les valeurs propres :

$$C_H(\lambda) = |H - \lambda I_2| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 3 & 8-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(8-\lambda) - 6$$

$$= 24 - 11\lambda + \lambda^2 - 6 = \lambda^2 - 11\lambda + 18 = (\lambda - 2)(\lambda - 9)$$

$$\boxed{C_H(\lambda) = \lambda^2 - \mathrm{Tr}(H)\lambda + \det(A)}$$

1.5.5 Le vecteur $\underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v\,\neq\,0}$ est-il un vecteur propre de la matrice $\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 7 & 9 \\ -4 & -5 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}}_{H}$? Si oui, déterminer la valeur propre associée.

$$Hv = 0 \quad \Rightarrow \quad v \in \operatorname{Ker}(f) = E_0$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & 9 \\ -4 & -5 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Mardi 11.03 : 1.5.1 à 1.5.8

1.5.9 a), f), g)