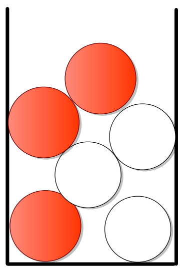
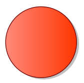
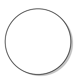
**4.3.22** Une urne contient 128 boules, dont $x^2$ sont blanches, toutes les autres étant rouges ($1 \leq x \leq 11$). On tire simultanément et au hasard 2 boules de l'urne. Déterminer $x$ de telle manière que la probabilité d'obtenir 2 boules de couleurs différentes soit maximale.



$$C_1^n = \frac{n!}{1! \cdot (n-1)!} = n \quad ; \quad C_2^{128} = \frac{\overset{128 \cdot 127}{\cancel{128!}}}{2!\ \cancel{126!}}$$

 $128 - x^2$

 $x^2$

$$1 \leq x \leq 11$$

$$p(\text{"d'obtenir 2 boules de couleurs différentes"}) = p(x) = \frac{C_1^{x^2} \cdot C_1^{128-x^2}}{C_2^{128}} = \frac{x^2 \cdot (128 - x^2)}{64 \cdot 127} = \frac{1}{8128}\left(128x^2 - x^4\right)$$

$$p'(x) = \frac{1}{8128}\left[256x - 4x^3\right] = \frac{4}{8128}\left(64x - x^3\right) = \frac{1}{2032}\, x\left(64 - x^2\right)$$

$$= \frac{1}{2032}\, x\,(8 - x)(8 + x) \qquad 1 \leq x \leq 11$$

| $x$ | 1 | | 8 | | 11 |
|---|---|---|---|---|---|
| $p'(x)$ | | + | 0 | − | |
| $p(x)$ | $\boxed{0{,}015625}$ | ↗ | $\boxed{\text{max}}$ | ↘ | $\boxed{0{,}104208}$ |
| | min | | | | min |

$$p(8) = \frac{64}{127} \cong 0{,}5039 = 50{,}39\,\%$$