11.02.25

Ker et Im

Soit un endomorphisme donné par sa matrice par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^4$;

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Déterminer $\mathrm{Ker}(h)$

2) Déterminer $\mathrm{Im}(h)$

1) Pour déterminer le noyau, il faut résoudre le système homogène $H \cdot X = 0$.

On transforme H sous forme échelonnée.

$$H \approx \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z + 2t = 0 \\ y + z + 3t = 0 \\ t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y + z \\ y = -z \\ t = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = \lambda \\ t = 0 \end{cases}$$

$$\mathrm{Ker}(h) = \left\langle \left((2; -1; 1; 0) \right) \right\rangle$$

2) $$\mathrm{Im}(h) = \left\langle \left((1,2,1,0), (1,1,0,1), (2,1,0,0) \right) \right\rangle$$

1.3.15 Soit E un espace vectoriel muni d'une base $(e_1; e_2; e_3)$ et h l'application linéaire de E vers E définie par,

$$h(e_1) = e_1 + e_2 \qquad h(e_2) = 2e_1 - e_2 \qquad h(e_3) = e_1 - 2e_2$$

Déterminer la matrice, le noyau et l'image de h. h est-elle injective, surjective ou bijective ?

$$E \xrightarrow{h} E \qquad H \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

$$\mathbb{R}^3 \xrightarrow{h} \mathbb{R}^3$$

1) $H = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2) $\mathrm{Ker}(h)$: $\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -2y - z = \lambda \\ y = -\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$

$\mathrm{Ker}(h) = \{ (\lambda, -\lambda, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R} \} = \langle (1; -1; 1) \rangle$

3) $\mathrm{Im}(h) = \langle (1, 1, 0), (2, -1, 0) \rangle$

4) Comme $\mathrm{Ker}(h) \neq \{0_E\}$, h pas injective et pas surjective

1.3.16 Soit E un espace vectoriel muni d'une base $(e_1; e_2)$ et h l'endomorphisme de E défini par $h(2e_1+e_2) = 2e_1 - 3e_2$ et $h(e_1 - e_2) = 3e_1 - e_2$. Déterminer la matrice, le noyau et l'image de h. h est-il injectif, surjectif ou bijectif ?

$h : E \longrightarrow E$, $\dim(E) = 2 \Rightarrow H \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

$h(2e_1 + e_2) = 2e_1 - 3e_2$

$h(e_1 - e_2) = 3e_1 - e_2$

1) Déterminer $h(e_1)$ et $h(e_2)$.

$h(2e_1 + e_2) = h(2e_1) + h(e_2) = 2h(e_1) + h(e_2)$

$h(e_1 - e_2) = h(e_1) - h(e_2)$

D'où le système :

$$\left\{\begin{array}{l} 2h(e_1) + h(e_2) = 2e_1 - 3e_2 \\ h(e_1) - h(e_2) = 3e_1 - e_2 \end{array}\right. \quad \begin{array}{c|c} h(e_1) & h(e_2) \\ \cdot 1 & \cdot 1 \\ \cdot(-2) & \cdot 1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 3h(e_2) = -4e_1 - e_2 \\ 3h(e_1) = 5e_1 - 4e_2 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} h(e_1) = \frac{5}{3}e_1 - \frac{4}{3}e_2 = \begin{pmatrix} 5/3 \\ -4/3 \end{pmatrix} \\ h(e_2) = -\frac{4}{3}e_1 - \frac{1}{3}e_2 = \begin{pmatrix} -4/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$H = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & \frac{-4}{3} \\ \frac{-4}{3} & \frac{-1}{3} \end{pmatrix}$$

H sous forme échelonnée $\quad H \approx \begin{pmatrix} \boxed{1} & -\frac{4}{5} \\ 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 \\ 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}$

1) $\operatorname{Ker}(h) = \{(0,0)\}$, donc h est injective

2) h injective $\Rightarrow$ h surjective , $\operatorname{Im}(f) = E$ $\Rightarrow$ h est bijective

$$\det(H) = \frac{5}{3} \cdot \frac{-1}{3} - \frac{-4}{3} \cdot \frac{-4}{3} = \frac{-5}{9} - \frac{16}{9} = \frac{-21}{9} \neq 0$$

1.3.17 Soit $a = (1;2)$ et $b = (3;-1)$ deux éléments de $\mathbb{R}^2$, $u = (1;0;1)$ et $v = (0;1;-2)$ deux éléments de $\mathbb{R}^3$. Déterminer la matrice, le noyau et l'image de l'application linéaire h de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^3$ telle que $h(a) = u$ et $h(b) = v$. h est-elle injective, surjective ou bijective ?

$$\mathcal{B}_1 = (e_1, e_2)$$

$$\mathcal{B}_2 = (e_1', e_2', e_3')$$

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{h} \mathbb{R}^3 \qquad H \in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$$

$$h(a) = u \Rightarrow h((1;2)) = h(e_1) + 2h(e_2) = e_1' + e_3'$$

$$h(b) = v \Rightarrow h((3;-1)) = 3h(e_1) - h(e_2) = e_2' - 2e_3'$$

$$\Rightarrow \begin{cases} h(e_1) + 2h(e_2) = e_1' + e_3' \\ 3h(e_1) - h(e_2) = e_2' - 2e_3' \end{cases} \Rightarrow H = \begin{pmatrix} 1/7 & 3/7 \\ 2/7 & -1/7 \\ -3/7 & 5/7 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \{ x = y = 0 \qquad \Rightarrow \mathrm{Ker}(h) = \{(0,0)\}$$

$$H \approx \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \boxed{1} & 3 \\ 0 & -7 \\ 0 & 14 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \boxed{1} & 3 \\ 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Im}(h) = \langle ((1;2;-3), (3;-1;5)) \rangle$$

1.3.18 Prouver que $f((x;y)) = (2x+y; x+2y)$ est un $\underbrace{\text{automorphisme}}_{\text{endomorphisme bijectif}}$ de $\mathbb{R}^2$.

$$F = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Ker}(f) : \begin{cases} 2x + y = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \iff x = y = 0$$

$\mathrm{Ker}(f) = \{(0,0)\} \Rightarrow f$ est injective $\Rightarrow f$ est surjective $\Rightarrow f$ est bijective

1.4.1

1.4.2

1.4.3