11.03.25

1.5.9 Déterminer, pour chacune des valeurs propres indiquées, une base du sous-espace propre associé.

a) $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 5$.

E_1: $\lambda = 1$

$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 0 \\ 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow E_1 = \langle \left((0,1) \right) \rangle$

E_5: $\lambda = 5$

$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x \\ 5y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 5x \\ 2x + y = 5y \end{cases} \Leftrightarrow 4y = 2x \Leftrightarrow x = 2y$

$E_5 = \langle \left((2;1) \right) \rangle$

$w = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f(w) = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

1.5.10 On donne les endomorphismes suivants de $\mathbb{R}^2$ (respectivement $\mathbb{R}^3$) par leur matrice relativement à une base de $\mathbb{R}^2$ (respectivement $\mathbb{R}^3$) :

Chercher, pour chacun d'eux, les valeurs propres et les sous-espaces propres associés. Lorsque c'est possible, déterminer la matrice de changement de base permettant de diagonaliser l'endomorphisme ; donner également la matrice de l'endomorphisme dans la nouvelle base.

a) $\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{F} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x + 2y \\ x + 2y \end{pmatrix}$

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x, y) \longmapsto (3x + 2y,\ x + 2y)$$

Polynôme caractéristique de F :

$$C_F(t) = \begin{vmatrix} 3-t & 2 \\ 1 & 2-t \end{vmatrix} = (3-t)(2-t) - 2 = 6 - 5t + t^2 - 2$$
$$= t^2 - 5t + 4$$
$$= (t-4)(t-1)$$

Deux valeurs propres $t = 1$ et $t = 4$.

E_1 : $\begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \iff x = -y \qquad E_1 = \langle ((1, -1)) \rangle$

E_4 : $\begin{cases} -x + 2y = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \iff x = 2y \qquad E_4 = \langle ((2, 1)) \rangle$

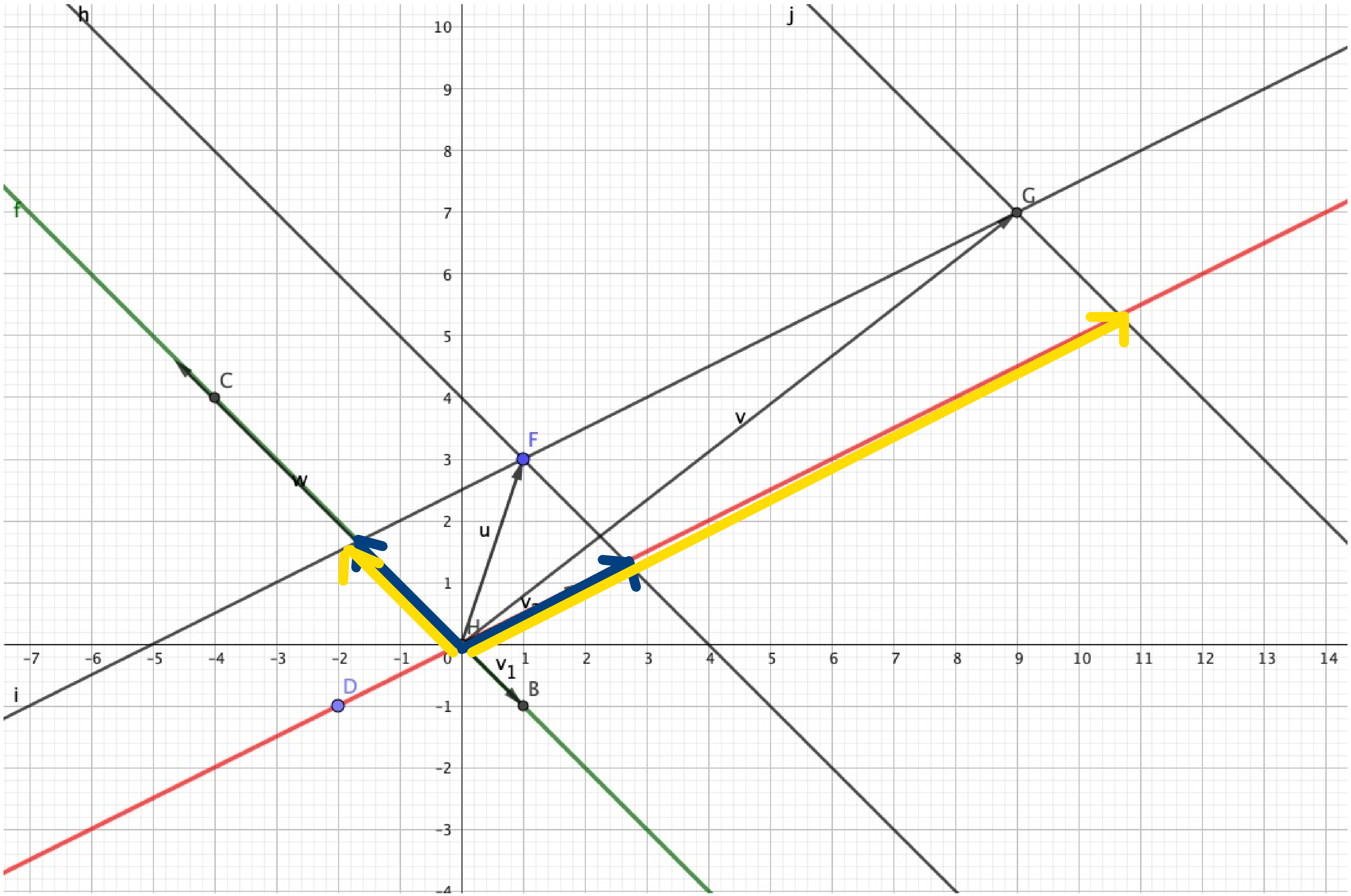
Matrice de changement de base : $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B^* = ((1, -1), (2, 1))$

Matrice de f dans B^* $\qquad F^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{R}^2, B) \arrow[r, "F"] & (\mathbb{R}^2, B) \arrow[d, "P^{-1}"] \\
(\mathbb{R}^2, B^*) \arrow[u, "P"] \arrow[r, "F^*"'] & (\mathbb{R}^2, B^*)
\end{tikzcd}$$

$$F = P \cdot F^* \cdot P^{-1}$$

$$F^* = P^{-1} \cdot F \cdot P$$



$u = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ $f(u) = \begin{pmatrix} a \\ 4b \end{pmatrix}$

1.5.10

e) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = H$

$$C_H(t) = \begin{vmatrix} 3-t & 2 & 1 \\ 1 & 4-t & 1 \\ 1 & 2 & 3-t \end{vmatrix}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{=} \begin{vmatrix} 3-t & 2 & 1 \\ 1 & 4-t & 1 \\ 0 & -2+t & 2-t \end{vmatrix} = (2-t) \begin{vmatrix} 3-t & 2 & 1 \\ 1 & 4-t & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\underset{C_2 \leftarrow C_2 + C_3}{=} (2-t) \begin{vmatrix} 3-t & 3 & 1 \\ 1 & 5-t & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{3+3} \cdot 1 \quad (2-t) \begin{vmatrix} 3-t & 3 \\ 1 & 5-t \end{vmatrix}$$

$$= (2-t)\left[(3-t)(5-t) - 3 \right] = (2-t)\left(12 - 8t + t^2 \right)$$

$$= (2-t)(t-6)(t-2)$$

$$C_A(t) = -(t-2)^2 (t-6)$$

Deux valeurs propres : $t = 2$ de multiplicité 2

$t = 6$ de multiplicité 1

E_6 :

$$\begin{cases} -3x + 2y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & -3 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 8 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = z = y \qquad E_6 = \langle (1, 1, 1) \rangle$$

E_2 : $\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases} \iff x + 2y + z = 0$

$$E_2 = \langle ((1, 0, -1), (0, 1, -2)) \rangle$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad H^* = H_{B^*}^{B^*} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B^* = ((1, 1, 1), (1, 0, -1), (0, 1, -2))$$