Déterminant

1) $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$

2) $\left|\begin{matrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{matrix}\right| \begin{matrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{matrix} = aei + dhc + gbf - ceg - fha - ibd$

3) Pour les matrices de tailles supérieure

1.4.3 Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 2 \begin{vmatrix} -3 & 0 & -6 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^{2+1} \cdot 1 \begin{vmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^{4+1} \cdot 1 \begin{vmatrix} 1 & -5 & 1 \\ -3 & 0 & -6 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} =$$

Exemples

1) $$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & x \\ a_2+b_2 & y \end{vmatrix} = (a_1+b_1)y - (a_2+b_2)x$$

$$= a_1y - a_2x + b_1y - b_2x$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & \boxed{x} \\ a_2 & \boxed{y} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & \boxed{x} \\ b_2 & \boxed{y} \end{vmatrix}$$

2) $$\begin{vmatrix} \alpha a_1 & x \\ \alpha a_2 & y \end{vmatrix} = \alpha a_1 y - \alpha a_2 x = \alpha(a_1 y - a_2 x)$$

$$= \alpha \begin{vmatrix} a_1 & x \\ a_2 & y \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \alpha a & \beta c \\ \alpha b & \beta d \end{vmatrix} = \alpha\beta \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 10 \\ 6 & 25 \end{vmatrix} = 3\cdot 5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

1.3.19 Soit P_3 l'ensemble des polynômes de la forme $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$, avec a_0, a_1, a_2, a_3 des nombres réels.

a) Soit $\varphi_a : P_3 \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie (pour $a \in \mathbb{R}$) par $\varphi_a(P) = P(a)$. Déterminer la matrice de φ_a relativement aux bases $(1; x; x^2; x^3)$ de P_3 et (1) de $\mathbb{R}$.

b) Déterminer le noyau et l'image de φ_a.

$P_3[x] = \{$ polynômes de degré 3 en $x\}$

a) $\varphi_a : P_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}$
$p \longmapsto p(a)$

$\left[p = x^3 - 2x + 7 , \quad a = -2 \qquad \varphi_{-2}(p) = 3 \right]$

$\Phi_a = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \end{pmatrix}$

$e_1 = 1$
$e_2 = x$
$e_3 = x^2$
$e_4 = x^3$

b) $\operatorname{Ker}(\varphi_a) = \{ p \in P_3 \mid p(a) = 0 \}$

$\operatorname{Im}(\varphi_a) = \mathbb{R}$, $\forall z \in \mathbb{R}$, il existe $p \in P_3$ tel que $\varphi_a(P) = P(a) = z$

$\operatorname{Ker}(\varphi_a) = \{ p = (x-a)(\alpha x^2 + \beta x + \gamma) \mid b, c \in \mathbb{R} \}$

1.3.21 Soit h un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ donné par

$$h(x;y;z) = (x + 2\,y - z;\ y + z;\ x + y - 2\,z)$$

a) Trouver une base de l'image de h.

b) Trouver une base du noyau de h.

$$\mathbb{R}^3 \xrightarrow{h} \mathbb{R}^3$$

$\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ base canonique

$$H = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{lll} h(e_1) & \quad & \quad \end{array} \end{array}$$

$$h(e_1) = (1;0,1) = \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

b) $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & -3 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3a \\ y = -a \\ z = a \end{cases}$$

$$\underline{\mathrm{Ker}(h) = \langle ((3; -1, 1)) \rangle}$$

a) $$\underline{\mathrm{Im}(h) = \langle ((1,0,1), (2,1,1)) \rangle}$$

1.3.22

1.3.23

1.3.24

25.02.25

$$d\left(\underbrace{x^2+2x}\right) = (x+1)(2x+2) = \underbrace{2x^2+4x+2}$$