14.01.25

2.3.5 Calculer les limites suivantes :

a) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{e^x-e^2}{x-2} \underset{"\frac{0}{0}"}{\overset{BH}{=}} \lim_{x\to 2}\frac{e^x}{1} = e^2$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\sin(x)} \underset{"\frac{0}{0}"}{\overset{BH}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{\cos(x)} = 1$

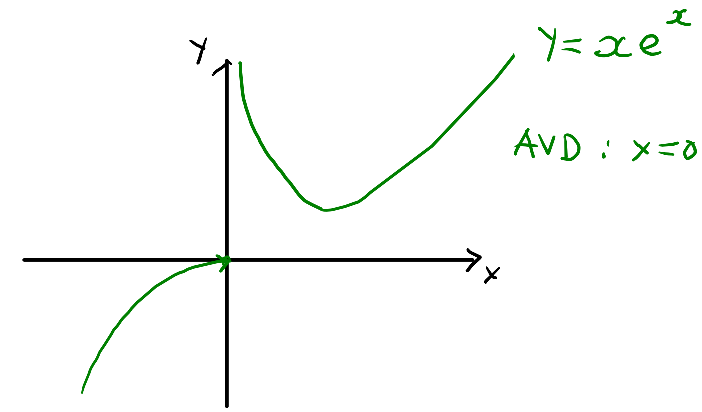
c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x\,e^x}{1-e^x} \underset{"\frac{0}{0}"}{\overset{BH}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{\cancel{e^x}(1+x)}{-\underset{-1}{\cancel{e^x}}} = -1$

d) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \underbrace{x\,e^{1/x}}_{0_+\cdot +\infty} = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} \underset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\overset{"BH"}{=}} \lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{\left(\frac{1}{x}\right)' e^{\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{\cancel{\frac{-1}{x^2}}\, e^{\frac{1}{x}}}{\cancel{\frac{-1}{x^2}}} = +\infty$

$x = \dfrac{1}{\frac{1}{x}}$

$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = \dfrac{-1}{x^2}$

$(e^u)' = u'\,e^u$



d') $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} x\,e^{\frac{1}{x}} = 0_-\cdot 0_+ = 0_-$

$e^{\frac{1}{-0{,}1}} = e^{-10} \simeq 0_+$

h) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2-2x+3} \underset{"\frac{+\infty}{+\infty}"}{\overset{BH}{=}} \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2x-2} \underset{"\frac{+\infty}{+\infty}"}{\overset{BH}{=}} \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2} = +\infty$

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{p_n(x)} = \infty$, où $p(x)$ est un polynôme de degré $n \geq 1$.

Intégration des fractions rationnelles

Soit $p(x)$ et $q(x)$ deux polynômes, avec $\deg(q(x)) \geq 1$

But : $\displaystyle\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx$.

On peut supposer que $\deg(p(x)) < \deg(q(x))$

On peut décomposer $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ de la façon suivante :

1) $\dfrac{A}{ax+b}$ où $A \in \mathbb{R}$

2) Si $(ax+b)$ apparaît n fois dans la décomposition de $q(x)$, alors ce facteur correspond à

$$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \frac{A_3}{(ax+b)^3} + \dots + \frac{A_n}{(ax+b)^n}$$

3) Si $q(x)$ a un facteur ax^2+bx+c, avec $b^2-4ac<0$

$$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$$

4) Si $q(x)$ a un facteur de la forme ax^2+bx+c, avec $b^2-4ac<0$ qui apparaît n fois dans la décomposition, alors ce facteur correspond à

$$\frac{A_1x+B_1}{(ax^2+bx+c)} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \dots + \frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}$$

Exemples

1) $\displaystyle\int \frac{9x^2-17x+6}{x^3-3x^2+2x}\,dx$

Décomposons cette fraction en éléments simples

$$\frac{9x^2-17x+6}{x(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2} = \frac{A(x-1)(x-2)+Bx(x-2)+Cx(x-1)}{x(x-1)(x-2)}$$

$$x^3-3x^2+2x = x(x^2-3x+2) = x(x-1)(x-2)$$

Déterminons A, B et C

Première méthode :

$x=0$: $6 = 2A \Rightarrow A = 3$

$x=1$: $-2 = -B \Rightarrow B = 2$

$x=2$: $8 = 2C \Rightarrow C = 4$

Deuxième méthode : On développe le terme de droite

$$9x^2-17x+6 = (A+B+C)x^2 + (-3A-2B-C)x + 2A$$

Puis on résout le système :

$$\begin{cases} A+B+C = 9 \\ -3A-2B-C = -17 \\ 2A = 6 \end{cases} \quad \overset{\dots}{\Rightarrow} \quad \begin{cases} A=3 \\ B=2 \\ C=4 \end{cases}$$

Finalement, on calcule l'intégrale :

$$\int \frac{9x^2-17x+6}{x^3-3x^2+2x}\,dx = \int \frac{3}{x}\,dx + \int \frac{2}{x-1}\,dx + \int \frac{4}{x-2}\,dx$$

$$= 3\ln|x| + 2\ln|x-1| + 4\ln|x-2| + C$$

2) $\displaystyle\int \frac{3x^3+4x^2+4x+4}{x^3+x}\,dx = \int 3\,dx + \int \frac{4x^2+x+4}{x(x^2+1)}\,dx$

Effectuons la division en colonne :

$$\begin{array}{rl|l} & 3x^3+4x^2+4x+4 & x^3+x \\ \cline{3-3} - & 3x^3 \qquad\quad +3x & 3 \\ \cline{2-2} & 4x^2+x+4 & \end{array}$$

On décompose $\displaystyle\frac{4x^2+x+4}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{A(x^2+1)+x(Bx+c)}{x(x^2+1)}$

$$\begin{array}{lcl} x=0 & : & 4 = A \\ x=1 & : & 9 = 8 + B+C \\ x=-1 & : & 7 = 8 + B-C \end{array} \Rightarrow \begin{cases} A = 4 \\ B+C = 1 \\ B-C = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 4 \\ B = 0 \\ C = 1 \end{cases}$$

$\displaystyle\int \frac{3x^3+4x^2+4x+4}{x^3+x}\,dx = \int 3\,dx + \int \frac{4}{x}\,dx + \int \frac{1}{x^2+1}\,dx$

CRM

$= 3x + 4\ln|x| + \mathrm{Arctan}(x) + C$

Décomposer en éléments simples, puis intégrer :

3) $$\frac{8x^3-42x^2+76x-49}{(x-1)(x-2)^2} = 8 + \frac{-2x^2+12x-17}{(x-1)(x-2)^2} = 8 + \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2}$$

4) $$\frac{x^4+4x^2+1}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$$