15.01.25

1.3.1 Les applications h, de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^p$, définies de la façon suivantes, sont-elles linéaires ?

a) $h((x;y)) = x + y$ ~~b) $h((x;y)) = xy$~~

c) $h((x;y)) = (2x - y; x)$ ~~d) $h((x;y)) = (x+1; y)$~~

e) $h((x;y)) = (x; y; x - y)$ f) $h((x;y;z)) = (x + 2y; z - 2y)$

g) $h((x;y;z)) = (0; x; 2x)$ ~~h) $h((x;y)) = (x^2; x + y)$~~

~~i) $h((x;y)) = (\sin(x); y)$~~ j) $h((x;y;z)) = (x - z; 2z - 2x)$

a)

$$h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto x + y$$

$$\mathcal{B}_1 = \big((1,0), (0,1) \big)$$

$$\mathcal{B}_2 = \big((1) \big)$$

$$h(e_1) = h\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 1$$

$$h(e_2) = 1$$

$$h((-3,7)) = 4$$

$$h\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix} \right) = \begin{array}{cc} h(e_1) & h(e_2) \\ \downarrow & \downarrow \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix} = 4$$

$$1 \times 2$$

f)

$$h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y,z) \longmapsto (x + 2y, z - 2y)$$

$$\mathcal{B}_1 = \big(\underset{e_1}{(1,0,0)}, \underset{e_2}{(0,1,0)}, \underset{e_3}{(0,0,1)} \big)$$

$$\mathcal{B}_2 = \big(\underset{f_1}{(1,0)}, \underset{f_2}{(0,1)} \big)$$

$$h((2,-3,4)) = (-4, 10)$$

$$H = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 2 \\ -2 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}} \end{pmatrix} \\ h(e_1) \;\; h(e_2) \;\; h(e_3) \end{array} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$h((2;-3,4)) = h\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \right) = h(2e_1 - 3e_2 + 4e_3) = 2\,h(e_1) - 3\,h(e_2) + 4\,h(e_3)$$

$$= 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$h(e_1) = h((1,0,0)) = (1,0)$$

3M6

Burier 2021

j) $h((x;y;z)) = (x - z; 2z - 2x)$

$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1.3.3 Soit h un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ tel que $h((-2;1)) = (3;5)$ et $h((1;3)) = (-1;2)$.
Trouver la matrice H de h relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

$$h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$H \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$$

$$h((-2,1)) = (3,5)$$

$$h((1,3)) = (-1,2)$$

Trouver $h(e_1)$ et $h(e_2)$

$$\begin{cases} -2h(e_1) + h(e_2) = (3,5) \\ h(e_1) + 3h(e_2) = (-1,2) \end{cases} \quad \begin{array}{c|c} h(e_2) & h(e_1) \\ \cdot 3 & \cdot 1 \\ \cdot(-1) & \cdot 2 \end{array}$$

$$-7h(e_1) = (10,13) \Rightarrow h(e_1) = \left(-\frac{10}{7}; -\frac{13}{7}\right)$$

$$7h(e_2) = (1,9) \Rightarrow h(e_2) = \left(\frac{1}{7}; \frac{9}{7}\right)$$

$$H = \begin{pmatrix} -10/7 & 1/7 \\ -13/7 & 9/7 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{B} = ((1,0),(0,1))$$

Posons $H = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

On a : $h((-2,1)) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} -2a + c = 3 \\ -2b + d = 5 \end{array}$

$h((1,3)) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} a + 3c = -1 \\ b + 3d = 2 \end{array}$

$$\begin{cases} -2a + c = 3 \\ a + 3c = -1 \end{cases} \begin{array}{c|c} a & c \\ \cdot 1 & \cdot(-3) \\ \cdot 2 & 1 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} 7c = 1 \\ 7a = -10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 1/7 \\ a = -10/7 \end{cases}$$

homomorphisme : application linéaire

endomorphisme : application linéaire d'un ev dans lui-même

isomorphisme : " bijective

1.3.4 Soit $\mathbb{R}^2$ muni d'une base $(e_1; e_2)$ et $u = xe_1 + ye_2$. Les applications h définies de la façon suivantes sont-elles des endomorphismes de $\mathbb{R}^2$?

a) $h(u) = 3u$ b) $h(u) = u + (x - y)e_2$

a)
$$h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$u \longmapsto 3u$$
$$(x,y) \longmapsto (3x, 3y)$$

$$h(u+v) = 3(u+v) = 3u + 3v = h(u) + h(v)$$
$$h(\lambda u) = 3(\lambda u) = \lambda(3u) = \lambda h(u)$$

$$H = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$ [homothétie de centre $O(0,0)$ et de rapport 3]

$$h(e_1) = 3e_1$$
$$h(e_2) = 3e_2$$

b) $h(u) = u + (x - y)e_2$

$$\mathcal{B} = (e_1, e_2)$$
$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \longmapsto (x, x)$$

$$h(u) = h((x,y)) = (x,y) + (0, x-y) = (x,x)$$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$h(u+v) = h\left((u_1;u_2) + (v_1;v_2)\right) = h\left((u_1+v_1, u_2+v_2)\right)$$
$$= (u_1+v_1, u_2+v_2) + (u_1+v_1-u_2-v_2)\, e_2$$
$$= (u_1, u_2) + (v_1; v_2) + (u_1-u_2)\, e_2 + (v_1 - v_2)\, e_2$$
$$= \underbrace{(u_1, u_2) + (u_1-u_2)\, e_2}_{h(u)} + \underbrace{(v_1, v_2) + (v_1-v_2)\, e_2}_{h(v)}$$
$$= h(u) + h(v)$$
$$h(\lambda u) = \ldots$$

Soit $\mathbb{R}^3$ muni d'une base $(e_1; e_2; e_3)$ et $u = xe_1 + ye_2 + ze_3$. Les applications h définies de la façon suivantes sont-elles des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$?

c) $h(u) = xe_1 \cancel{+ y}e_2 + e_3$ d) $h(u) = ye_1 - xe_2$

moche

c) $h(0) = 0$

$h(0) = (0, 0, 1)$

d) $H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$h\big((x, y, z)\big) = (y, -x, 0)$

$h(e_1) = h\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $h(e_2) = h\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $h(e_3) = h\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

1.3.6 Un endomorphisme g de $\mathbb{R}^2$ envoie $(2;-1)$ sur $(1;1)$ et $(0;2)$ sur $(3;1)$. Former la matrice G de g relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et déterminer l'image de $u=(-4;1)$ par g, ainsi que son image réciproque par g.

$$\mathcal{B} = \Big(\overbrace{(1,0)}^{e_1},\ \overbrace{(0,1)}^{e_2}\Big)$$

$$g : (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}) \xrightarrow{G} (\mathbb{R}^2, \mathcal{B})$$

- $g((2;-1)) = (1;1)$
- $g((0;2)) = (3,1)$ $\left[\Rightarrow g(2\cdot(0,1)) = 2\cdot g((0,1)) = (3,1) \Rightarrow g(e_2) = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \right]$

On détermine $G = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

$$g((2,-1)) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$g((0,2)) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2a - c = 1 \\ 2b - d = 1 \\ 2c = 3 \\ 2d = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2}(c+1) = \frac{5}{4} \\ b = \frac{1}{2}(d+1) = \frac{3}{4} \\ c = 3/2 \\ d = 1/2 \end{cases}$$

$$G = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

L'endomorphisme de façon explicite : $\boxed{g((x,y)) = \left(\frac{5}{4}x + \frac{3}{2}y,\ \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}y\right)}$

$$g((2,-1)) = \left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2} ; \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right) = (1,1)$$

$$g(u) = g((-4,1)) = \left(-5 + \frac{3}{2} ; -3 + \frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{7}{2} ; -\frac{5}{2}\right)$$

Calculons, si possible $g^{-1}(u)$:

$$\begin{tikzcd} (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}) \arrow[r, bend left, "G"] & (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}) \arrow[l, bend left, "G^{-1}"] \end{tikzcd}$$

$$|G| = \begin{vmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{5}{8} - \frac{9}{8} = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}$$

Calculons l'inverse de G :

Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors $\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\mathrm{Det}(A)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}$ avec $\mathrm{Det}(A) = ad - bc$.

$$G^{-1} = -2\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

$$g^{-1}(u) = g^{-1}((-4,1)) = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -6 - \frac{5}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -\frac{17}{2} \end{pmatrix}$$