

Intégration de fractions rationnelles

1) Éléments simples de première espèce :

$$1.1) \int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + c$$

$$1.2) \int \frac{dx}{(x-a)^n} = \frac{-1}{n-1} (x-a)^{-n+1} + C = \frac{-1}{n-1} \frac{1}{(x-a)^{n-1}} + C$$

2) Éléments simples de deuxième espèce :

$$2.1) \int \frac{x}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{2} \ln|x^2+a^2| + c$$

$$2.2) \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

Décomposer en éléments simples, puis intégrer :

$$3) \frac{8x^3 - 42x^2 + 76x - 49}{(x-1)(x-2)^2} = 8 + \frac{-2x^2 + 12x - 17}{(x-1)(x-2)^2} = 8 + \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2}$$

$$4) \frac{x^4 + 4x^2 + 1}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$$

$$3) A = -7, B = 5 \text{ et } C = -1$$

$$\int f(x) dx = 8x - 7 \ln|x-1| + 5 \ln|x-2| + \frac{1}{x-2} + C$$

$$4) A = 1, B = 0, C = 0, D = 2, E = 0$$

$$\int f(x) dx = \ln|x| - \frac{1}{x^2+1} + C$$

2.3.10 Calculer :

$$\text{a) } \int \frac{4x - 1}{x^2 - 2x - 8} dx = \int f(x) dx$$

$$\text{b) } \int \frac{1}{(x^2 - 1)^2} dx = \int f(x) dx$$

$$\text{c) } \int \frac{dx}{x^4 - 3x^3} = \int f(x) dx$$

$$1) \frac{4x - 1}{x^2 - 2x - 8} = \frac{A}{x - 4} + \frac{B}{x + 2} = \frac{A(x + 2) + B(x - 4)}{(x - 4)(x + 2)}$$

$$\bullet x = -2 : \quad -9 = -6B \quad \Rightarrow B = \frac{3}{2}$$

$$\bullet x = 4 : \quad 15 = 6A \quad \Rightarrow A = \frac{5}{2}$$

$$\int f(x) dx = \int \frac{5/2}{x - 4} dx + \int \frac{3/2}{x + 2} dx = \frac{5}{2} \ln|x - 4| + \frac{3}{2} \ln|x + 2| + c$$

$$\text{b) } \frac{1}{(x - 1)^2 (x + 1)^2} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{(x - 1)^2} + \frac{C}{x + 1} + \frac{D}{(x + 1)^2}$$

$$\text{c) } \frac{1}{x^3 (x - 3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x - 3}$$