

n objets

| | sans rep | avec rep |
|-------------|----------|--------------------|
| Permutation | P_n | \overline{P}_n |
| Arrangement | A_p^n | \overline{A}_p^n |
| Combinaison | C_p^n | \overline{C}_p^n |

ordre

ordre

l'ordre ne compte pas

Combinaisons avec répétitions

Soit E un ensemble de n éléments, on appelle combinaisons avec répétitions de p éléments de E toute collection de p éléments $[x_1, x_2, \dots, x_p]$ de E , non ordonnée et non nécessairement distincts.

- Pas d'ordre
- Répétition possible
- On ne prend pas obligatoirement tous les éléments

Exemple 1

choisir 12 objets parmi 8 catégories possibles : \overline{C}_{12}^8

Exemple 2 Pour trouver la formule

Soit une urne qui contient des boules de couleurs différentes

R, V, B et J.

On tire 8 boules avec répétitions avec remise et sans tenir compte de l'ordre.

$$\overline{C}_{8}^4 \text{ couleurs}$$

Un tirage possible : $v v b j v j b r$ (t₁) $r v r v v r v v$ (t₂)

Comme l'ordre ne compte, on les place par couleur R-V-B-J

Le tirage s'écrit $r v v v b b j j$ (t₁) $r r r v v v v v$ (t₂)

On remplace chaque couleur par un trait horizontal

— — — — — (t₁)
— — — — — (t₂)

Pour différencier ces deux tirages, on ajoute des traits verticaux pour séparer les catégories

(t₁) $\begin{array}{c} - \\ | \\ r \end{array} \begin{array}{c} - \\ | \\ v \end{array} \begin{array}{c} - \\ | \\ b \end{array} \begin{array}{c} - \\ | \\ j \end{array} -$

(t₂) $\begin{array}{c} - \\ | \\ r \end{array} \begin{array}{c} - \\ | \\ v \end{array} \begin{array}{c} - \\ | \\ b \end{array} \begin{array}{c} - \\ | \\ j \end{array} -$

A chacune de ces combinaisons avec répétitions de 8 éléments pris parmi 4, correspond l'ensemble des permutations de 8 traits horizontaux, 3 traits verticaux

1) C'est une permutation:
$$\bar{P}_{8+4-1}(8, 3) = \frac{11!}{8! 3!} = C_3^{11} = C_8^{11} = \bar{C}_8^{11}$$

2)
$$\bar{C}_k^n = \bar{P}_{n-1+k}(n-1, k)$$

| | | |
|--------------|-------|---|
| n catégories | ⇒ n-1 | |
| k éléments | | — |

3)
$$\bar{C}_k^n = C_k^{n+k-1}$$

Combien de pièces différentes existe-t-il dans un jeu de domino ?

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \cdot & \cdot \circ \\ \hline \cdot & \circ \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \circ & \cdot \\ \hline \circ & \cdot \\ \hline \end{array} \quad \bar{0}, R$$

Pour construire une pièce de domino : 2 chiffres, 0 à 6

$$\bar{0} \quad | \quad \bar{1} \quad | \quad 2 \quad | \quad \bar{3} \quad | \quad 4 \quad | \quad 5 \quad | \quad 6$$

$$\bar{C}_2^7 = C_2^7 = 28$$