CRM

23.01.25

$\frac{1}{(x-a)(x-b)}$	$\frac{1}{a-b}\ln\left\|\frac{x-a}{x-b}\right\|$
$\frac{1}{x^2+a^2}$	$\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)$

2.3.12 Calculer les intégrales indéfinies :

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+2x+5} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+4} = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) + c$

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-6x+5} = \int \frac{dx}{(x-1)(x-5)} = \frac{1}{-4}\ln\left|\frac{x-1}{x-5}\right| + c = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-5}{x-1}\right| + c$

$a = 1$ $\quad$ $a = 5$

$b = 5$ $\quad$ $b = 1$

$-\ln(r) = \ln\left(\frac{1}{r}\right)$

f) $\displaystyle\int \frac{3x-1}{x^2-x+1}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2-x+1} = I_1(x) + I_2(x)$

Cette expression $\dfrac{3x-1}{x^2-x+1}$ est difficile à intégrer.

Il faut faire apparaître au numérateur la dérivée du dénominateur.

$$\frac{3x-1}{x^2-x+1} = \frac{K(2x-1)+\alpha}{x^2-x+1} = K\,\frac{2x-1}{x^2-x+1} + \alpha\,\frac{1}{x^2-x+1} \quad \text{où } K,\alpha \in \mathbb{R}$$

$$(x^2-x+1)' = 2x-1 \qquad \ln \qquad \arctan$$

- $3x-1 = \frac{3}{2}(2x-1) = 3x - \frac{3}{2} \Rightarrow K = \frac{3}{2}$ et $\alpha = \frac{1}{2}$
- $K(2x-1)+\alpha = 2Kx - K + \alpha \Rightarrow \begin{cases} 2K = 3 \\ -K+\alpha = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} K = \frac{3}{2} \\ \alpha = -1 + \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \end{array}$

$$I_1(x) = \frac{3}{2}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx = \frac{3}{2}\ln\left(x^2-x+1\right) + C_1$$

$$\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$I_2(x) = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2-x+1} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) + C_2$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C_2$$

$$\boxed{\text{f) } \int \frac{3x-1}{x^2-x+1}\,dx = \frac{3}{2}\ln\left(x^2-x+1\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C}$$

g) $\displaystyle\int \frac{7x+1}{6x^2+x-1}\,dx = \frac{1}{6}\int \frac{7x+1}{(x-\frac{1}{3})(x+\frac{1}{2})}\,dx = \int \frac{7x+1}{(3x-1)(2x+1)}\,dx$

$6x^2+x-1 = (3x-1)(2x+1)$

$\Delta = 1+24 = 25 = 5^2$

$x_1 = \frac{-1+5}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

$x_2 = \frac{-1-5}{12} = \frac{-6}{12} = -\frac{1}{2}$

$\Bigg\}\; 6x^2+x-1 = \underset{\underset{3\cdot 2}{\shortparallel}}{6}\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right) = (3x-1)(2x+1)$

<u>Eléments simples</u>

$$\frac{7x+1}{(3x-1)(2x+1)} = \frac{A}{3x-1} + \frac{B}{2x+1} = \frac{A(2x+1)+B(3x-1)}{(3x-1)(2x+1)}$$

Donc $7x+1 = A(2x+1)+B(3x-1)$

1. $x = -\frac{1}{2}$: $\quad -\frac{5}{2} = B\cdot\left(-\frac{5}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad B = 1$
2. $x = \frac{1}{3}$: $\quad \frac{10}{3} = A\cdot\frac{5}{3} \quad \Rightarrow \quad A = 2$

$$\int \frac{7x+1}{6x^2+x-1}\,dx = \int \frac{2}{3x-1}\,dx + \int \frac{1}{2x+1}\,dx$$

$$= \frac{2}{3}\ln|3x-1| + \frac{1}{2}\ln|2x+1| + C$$

j) devoir pour mardi

Etude de fonctions exp et log

2.3.18 Étudier les fonctions suivantes :

a) $f(x) = e^{-x^2}$

1) $ED(f) = \mathbb{R}$

3) Signe de la fonction :

x	
$f(x)$	$+$

2) Parité : $f(-x) = e^{-(-x)^2} = e^{-x^2} = f(x) \Rightarrow f$ est paire

4) AV : aucune

AH : $\lim\limits_{x \to \infty} e^{-x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad AH : y = 0$

5) Croissance : $f'(x) = -2x e^{-x^2}$

Tableau de la croissance :

x		0	
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$

max : $M(0 ; 1)$

c'est un max global

6) Courbure : $f''(x) = (\underbrace{-2x}_{u} \underbrace{e^{-x^2}}_{v})' = -2e^{-x^2} + 4x^2 e^{-x^2}$

$(uv)' = u'v + uv'$ $\quad = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1)$

$\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

zéros de $f''(x)$: $2x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

Tableau de la courbure :

x		$-\sqrt{2}/2$		$\sqrt{2}/2$	
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\cup$ convexe	pi	$\cap$ concave	pi	$\cup$ convexe

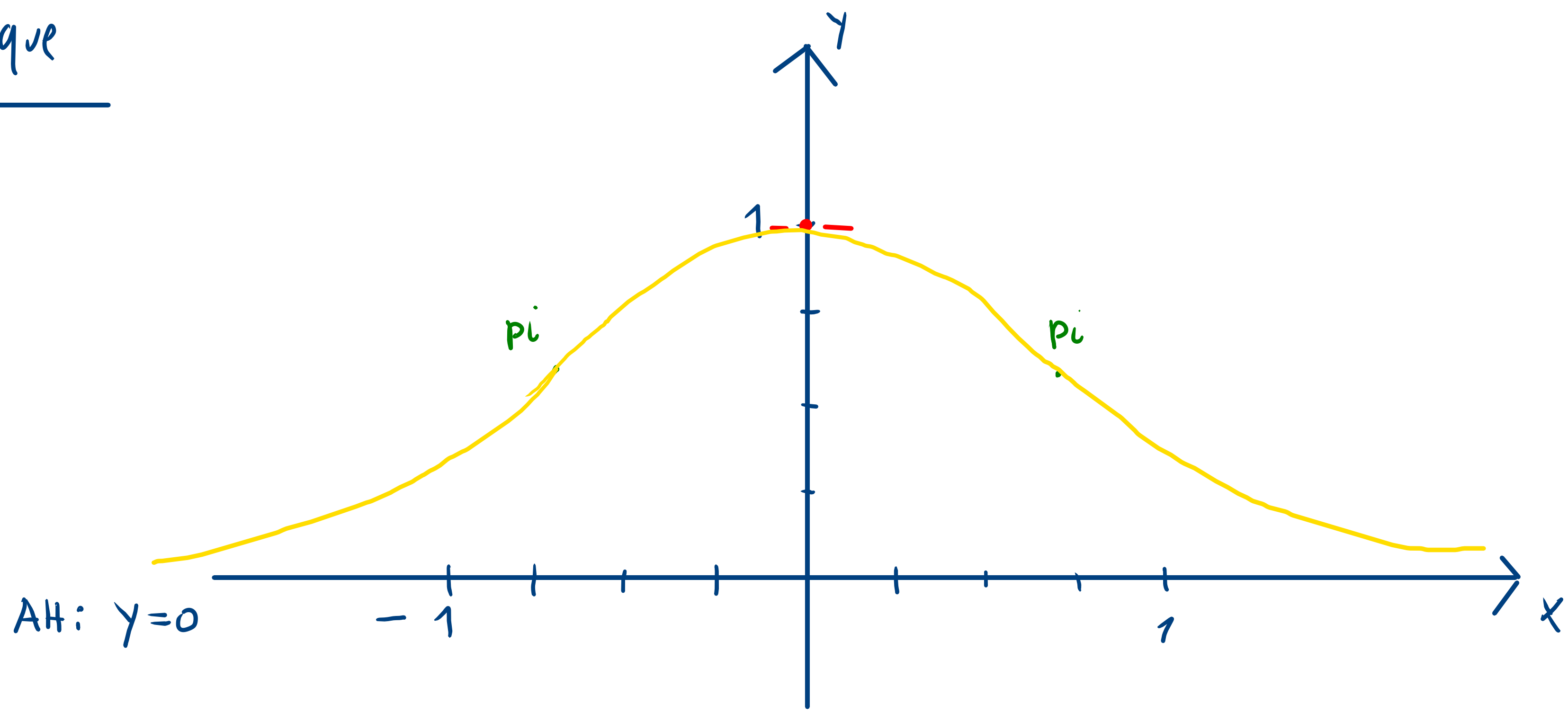
$I_1\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} ; e^{-1/2}\right)$

$I_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} ; e^{-1/2}\right)$

Deux point d'inflexion (ou palier) : $f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = e^{-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}} \cong 0{,}61$

$\pm\frac{\sqrt{2}}{2} = \pm 0{,}71$

7) Graphique



pi (0,71; 0,61)

Mardi : 2.3.12 : j)

Jeudi : 2.3.18 : e)

2.3.19 : a)