26.02.25

Déterminant d'ordre 2

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Quelques propriétés :

1) $\begin{vmatrix} a+x & b \\ c+y & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & b \\ y & d \end{vmatrix}$

2) $\begin{vmatrix} a & b+x \\ c & d+y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & x \\ c & y \end{vmatrix}$

3) $\begin{vmatrix} \alpha a & b \\ \alpha c & d \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

4) $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$, $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$

5) $\begin{vmatrix} a & a \\ c & c \end{vmatrix} = 0$ et $\begin{vmatrix} \alpha a & a \\ \alpha c & c \end{vmatrix} = 0$

6) $\begin{vmatrix} a+\alpha b & b \\ c+\alpha d & d \end{vmatrix} = (a+\alpha b)d - (c+\alpha d)b = ad + \cancel{\alpha bd} - cb - \cancel{\alpha bd}$

$= ad - bc = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

Si on ajoute à une colonne (ou à une ligne) un multiple de l'autre colonne (ou l'autre ligne), la valeur du déterminant ne change pas.

7) $\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} = -(ad - bc) = -\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

Si on permute les 2 colonnes (ou les deux lignes), le déterminant change de signe.

8) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} \Rightarrow |A| = |{}^tA|$

Les déterminants d'ordre 3

$$A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq 3} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Soit A_{ij} la matrice 2×2 obtenue en supprimant la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne.

Par exemple : $A_{23} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cancel{a_{13}} \\ \cancel{a_{21}} & \cancel{a_{22}} & \cancel{a_{23}} \\ a_{31} & a_{32} & \cancel{a_{33}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$

Le <u>mineur</u> du coefficient a_{ij} est le nombre $\det(A_{ij})$.

Le <u>cofacteur</u> du coefficient a_{ij} est le nombre $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$

Théorème

Soit A un matrice carrée d'ordre n.

1) A est inversible $\Longleftrightarrow$ $\det(A) \neq 0$

2) Soit $C = \underbrace{\left((-1)^{i+j} \det(A_{ij}) \right)}_{\text{matrice des cofacteurs}}$.

Alors $A \cdot {}^tC = {}^tC \cdot A = \det(A) \cdot I_n$, $I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

3) Si A est inversible, $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \, {}^tC$

Exemples

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Vérifions que A est inversible.

$$\left|\begin{matrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{matrix} = 0 + 1 + 1 - 0 - 0 - 0 = 2$$

$$- \quad - \quad - \quad + \quad + \quad +$$

Sarrus

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2} \cdot 1 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot 0 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} \cdot (-1) \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -(0-1) + \underbrace{0\,(0-1)} + (0+1) =$$

$$1 + 0 + 1 = 2$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculons la matrice des cofacteurs :

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \qquad C_{12} = 1 \qquad C_{13} = 1$$

$$C_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \qquad C_{22} = -1 \qquad C_{23} = 1$$

$$C_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad C_{32} = -1 \qquad C_{33} = 1$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Déterminons A^{-1} :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Merci Sarah

1.4.3 Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 7 & 5 & -1 & -3 \\ -1 & -3 & 1 & 2 \\ -6 & -1 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 7 & 5 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \\ -6 & -1 & 5 \end{vmatrix}$$

$C_1 - 2C_4$

$C_2 - C_4$

$C_3 + C_4$

$$= \begin{vmatrix} 7 & 5 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ -6 & -1 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & -1 \\ 29 & 24 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \, (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 29 & 24 \end{vmatrix} = 144 - 58 = 86$$

1.4.8 Calculer, lorsque c'est possible, l'inverse des matrices suivantes :

f) $F = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{matrix} = 12 - 2 + 0 - 0 + 3 - 8 = 5$

$F^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$

1.4.9 Dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique $(e_1; e_2)$, on considère les vecteurs $u = (2; 1)$, $v = (-1; 1)$ et l'endomorphisme h de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice relativement à la base $(e_1; e_2)$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Donner la matrice de h relativement aux bases suivantes :

a) $(e_1 + e_2; 3e_2)$ b) $(u; v)$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B = (e_1, e_2) = \big((1,0), (0,1) \big)$$

$$B_1 = \big((1,1), (0,3) \big)$$

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{R}^2, B) \arrow[r, "H"] & (\mathbb{R}^2, B) \arrow[d, "P^{-1}"] \\
(\mathbb{R}^2, B_1) \arrow[u, "P"] \arrow[r, "H_1"] & (\mathbb{R}^2, B_1)
\end{tikzcd}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$H_1 = P^{-1} \cdot H \cdot P$$