1.4.9 Dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique $(e_1; e_2)$, on considère les vecteurs $u = (2; 1)$, $v = (-1; 1)$ et l'endomorphisme h de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice relativement à la base $(e_1; e_2)$ est $\mathcal{B}$ //

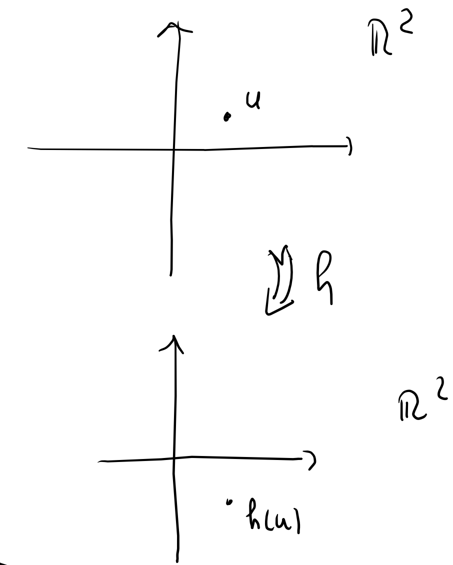
$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Donner la matrice de h relativement aux bases suivantes :

a) $(e_1 + e_2; 3e_2)$ b) $(u; v)$

$\mathcal{B}^*$ // $= \big((1,1), (0,3) \big)$

$$h(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$



a)

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}) \arrow[r, "H = H_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}"] & (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}) \arrow[d, "P^{-1}"] \\
(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}^*) \arrow[u, "P"] \arrow[r, "H^* = H_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{B}^*}"] & (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}^*)
\end{tikzcd}$$

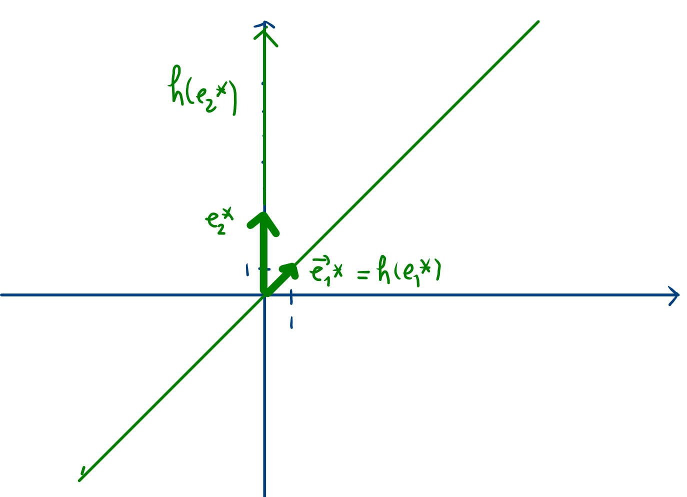
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$H^* = \left(h(e_1^*) \;\middle|\; h(e_2^*) \right)$$

$$h(e_1^*) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}^*}$$

$$h(e_2^*) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}^*}$$

Donc $H^* = H_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{B}^*} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{B}^*}$



$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{R}^2, B) \arrow[r, "H = H_B^B"] & (\mathbb{R}^2, B) \arrow[d, "P^{-1}"] \\
(\mathbb{R}^2, B^*) \arrow[u, "P"] \arrow[r, "H^* = H_{B^*}^{B^*}"] & (\mathbb{R}^2, B^*)
\end{tikzcd}$$

CRM page 25

Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors $\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\mathrm{Det}(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}$ avec $\mathrm{Det}(A) = ad - bc$.

Nous devons déterminer $H^* = H_{B^*}^{B^*}$.

On a $H^* = P^{-1} \cdot H \cdot P$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$H^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1.4.9 Dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique $(e_1; e_2)$, on considère les vecteurs $u = (2; 1)$, $v = (-1; 1)$ et l'endomorphisme h de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice relativement à la base $(e_1; e_2)$ est

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Donner la matrice de h relativement aux bases suivantes :

a) $(e_1 + e_2; 3e_2)$ b) $(u; v)$

b) $B^{**} = \big((2,1), (-1,1) \big)$

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{R}^2, B) \arrow[r, "H"] & (\mathbb{R}^2, B) \arrow[d, "P^{-1}"] \\
(\mathbb{R}^2, B^{**}) \arrow[u, "P"] \arrow[r, "H^{**}"] & (\mathbb{R}^2, B^{**})
\end{tikzcd}$$

$$H^{**} = \begin{pmatrix} 1/3 & 4/3 \\ -4/3 & 11/3 \end{pmatrix} = P^{-1} \cdot H \cdot P$$