2.3.21 Soit les courbes $\gamma_1 : y = e^{-x}$ et $\gamma_2 : y = e^{-x}\cos(x)$.

28.01.25

a) Déterminer les coordonnées des points d'intersection des courbes γ_1 et γ_2 sur $[-\pi; 3\pi]$.

b) Prouver qu'en chacun de ces points, γ_1 et γ_2 sont tangentes.

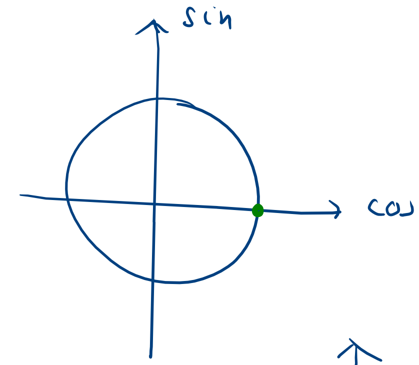
a) γ_1: $f(x) = e^{-x}$

γ_2: $g(x) = e^{-x}\cos(x)$

$$e^{-x} = e^{-x}\cos(x) \quad \Big| \div e^{-x} \neq 0$$

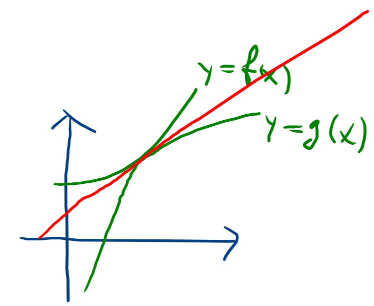
$$\cos(x) = 1$$

$$x = k \cdot 2\pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$



Dans $I = [-\pi, 3\pi]$, $x_1 = 0$ ou $x_2 = 2\pi$

$P_1(0, 1)$ et $P_2(2\pi, e^{-2\pi})$



b) Deux courbes $y = f(x)$ et $y = g(x)$ sont tangentes en $P(a, b)$ si et seulement si : 1) $f'(a) = g'(a)$

2) $f(a) = g(a)$ ✓ est vérifiée

$$f'(x) = \left(e^{-x}\right)' = -e^{-x}$$

$$g'(x) = \left(e^{-x}\cos(x)\right)' = -e^{-x}\cos(x) - e^{-x}\sin(x) = -e^{-x}\left(\cos(x) + \sin(x)\right)$$

Avec $P_1(0, 1)$: $f'(0) = -1$ et $g'(0) = -1$

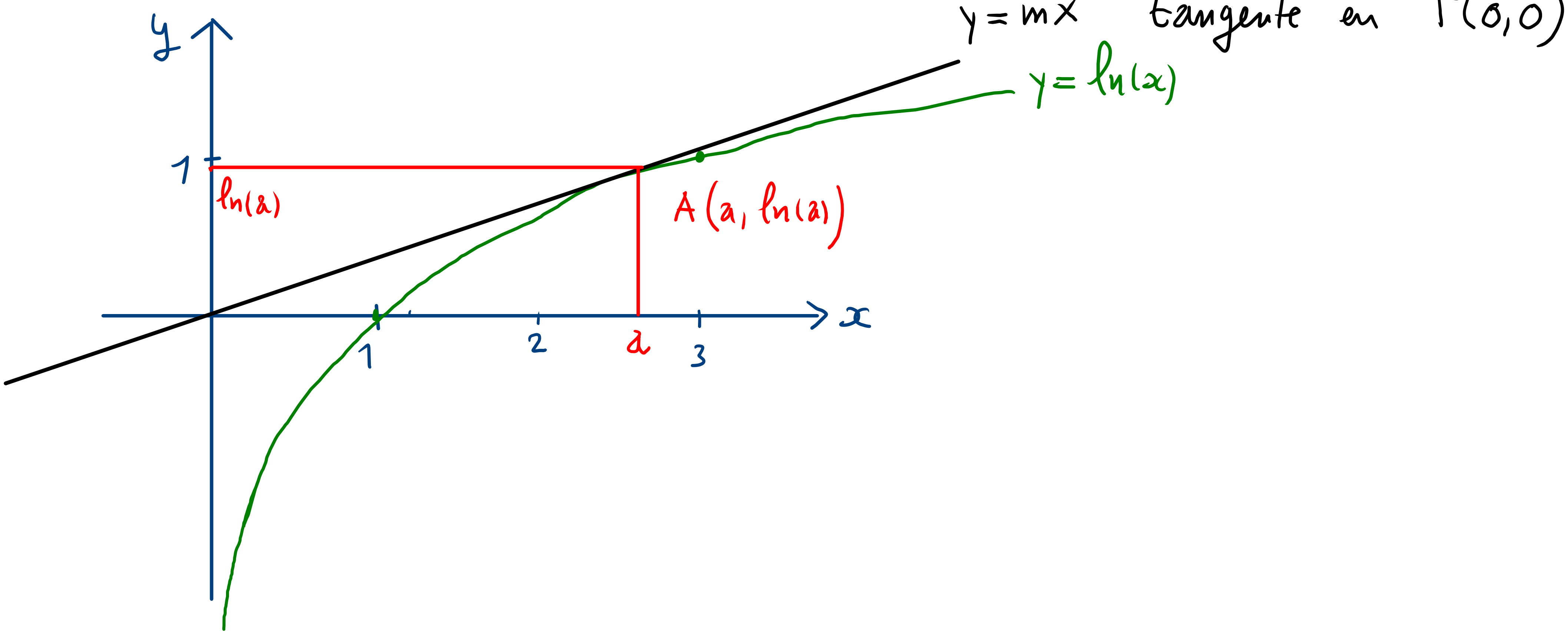
Avec $P_2(2\pi, e^{-2\pi})$: $f'(2\pi) = -e^{-2\pi} \cong 0{,}002$

$$g'(2\pi) = -e^{-2\pi}$$


$f(x) = e^{-x}$
$g(x) = e^{-x}\cos(x)$
-2.5 -2 -1.5 -1 -0.5 0 0.5 1 1.5 2 2.5 3 3.5 4 4.5 5 5.5 6 6.5 7 7.5
3 2.5 2 1.5 1 0.5 -0.5 -1 -1.5 -2 -2.5

2.3.23 De l'origine, on mène la tangente à la courbe $y = \ln(x)$. Déterminer l'équation de cette tangente, ainsi que les coordonnées de son point de contact avec la courbe.

$f(x) = \ln(x)$

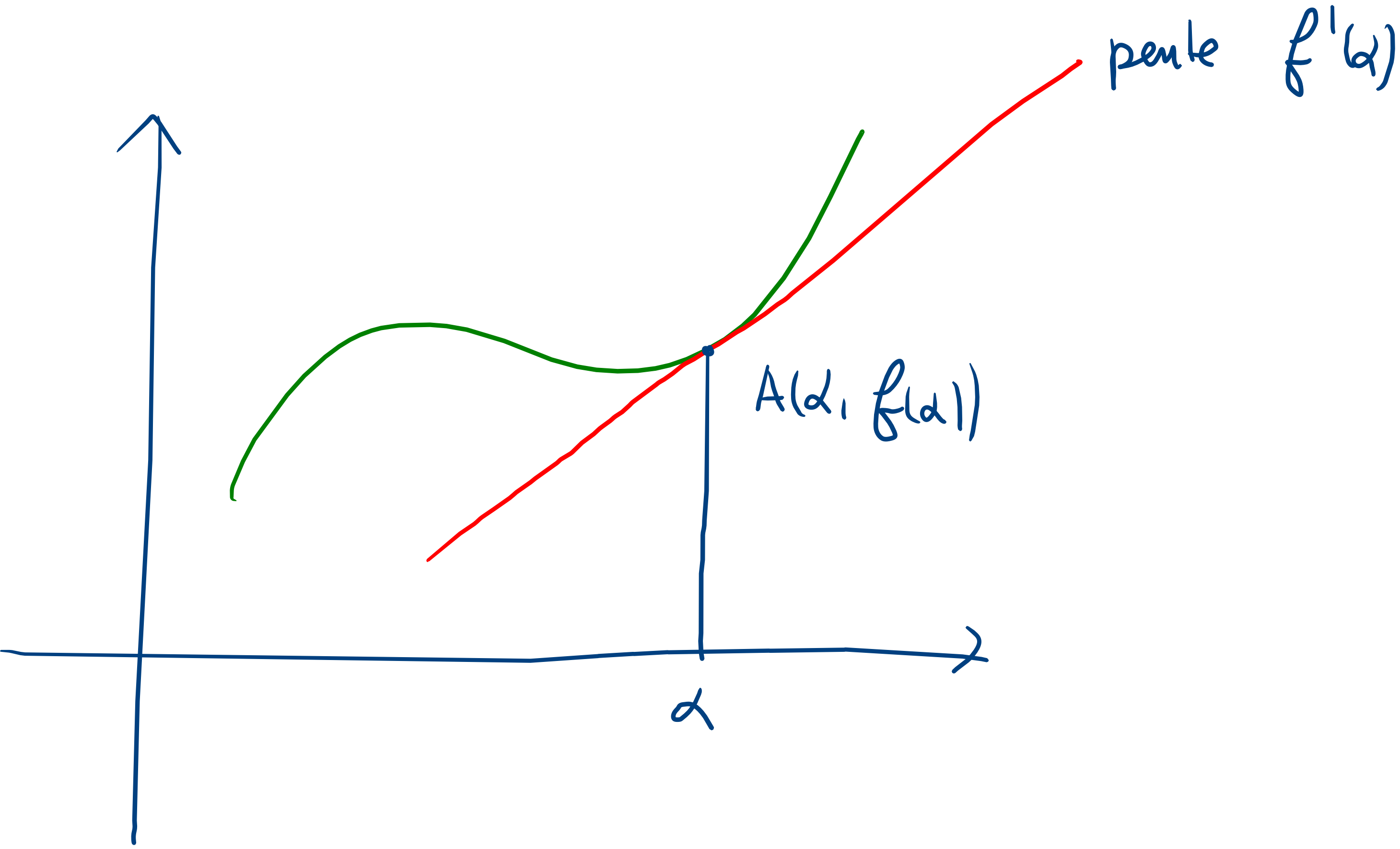


$f'(x) = \frac{1}{x}$ en $A(a, \ln(a))$, la pente de la tangente $m = \frac{1}{a}$

La tangente s'écrit $y = \frac{1}{a}x$. Elle passe par $A(a, \ln(a))$:

$$\ln(a) = \frac{1}{a} \cdot a \iff \ln(a) = 1 \iff a = e$$

Finalement, la tangente : $y = \frac{1}{e}x \iff x - ey = 0$


pente $f'(\alpha)$
$A(\alpha, f(\alpha))$
α

2.3.24 Soit E et F les points d'inflexion de la courbe $y = \ln(x^2+1)$. On fait tourner le morceau de surface limité par le segment EF et la courbe autour de Oy. Calculer le volume du solide ainsi engendré.

Posons $f(x) = \ln(x^2+1)$, $ED(f) = \mathbb{R}$ $\qquad [\ln(u)]' = \dfrac{u'}{u}$

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2+1} \qquad ED(f) = \mathbb{R}$$

$$f''(x) = \frac{2(x^2+1) - 2x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2} = 2\,\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

$u = 2x$; $u' = 2$
$v = x^2+1$; $v' = 2x$

Tableau de la courbure

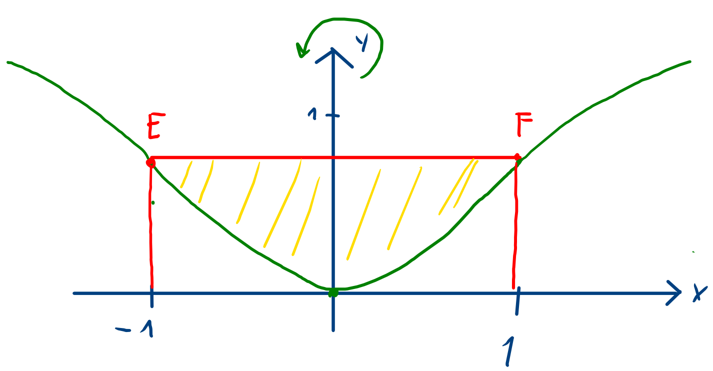
x		-1		1	
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	concave	pi	convexe	pi	concave

Points d'inflexion :

$E(-1, \ln(2))$

$F(1, \ln(2))$

$\ln(2) \cong 0{,}69$



$y = \ln(x^2+1)$

$e^y = x^2+1 \iff x^2 = e^y - 1$

$x = \sqrt{e^y-1}$

$x \in [-1, 1] \iff y \in [0; \ln(2)]$

$$V = \pi \int_0^{\ln(2)} \left(\sqrt{e^y-1}\right)^2 dy = \pi \int_0^{\ln(2)} e^y - 1 \, dy = \pi \; e^y - y \Big|_0^{\ln(2)}$$

$$= \pi \left((2 - \ln(2)) - 1 \right) = \underline{\pi\,(1 - \ln(2))}$$