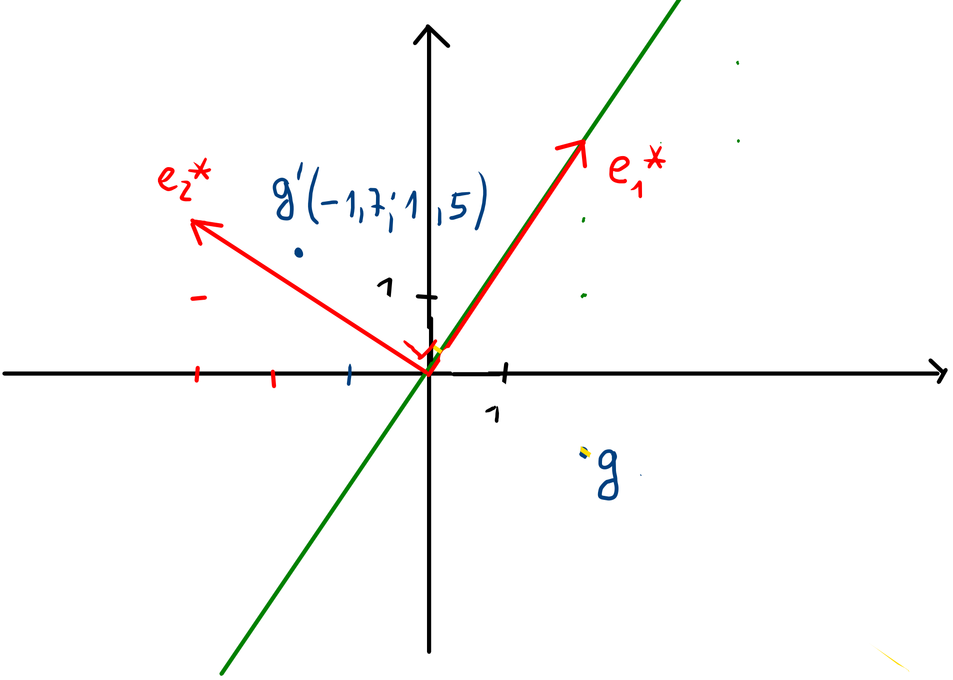
Introduction à la diagonalisation

Considérons la symétrie axiale de $\mathbb{R}^2$ d'axe (d) : $3x - 2y = 0$

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique.

Quelle est la matrice de cette application linéaire.



Soit $g = (2;-1)$

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ cette symétrie.

Par dessin $f((2;-1)) \approx (-1{,}7;1{,}5)$

Exprimons cette symétrie par rapport à une base "sympathique" :

Soit $e_1^* = (2;3)$ et $e_2^* = (-3,2)$

On a $f(e_1^*) = e_1^*$ et $f(e_2^*) = -e_2^*$

Exprimons dans la base $\mathcal{B}^* = (e_1^*, e_2^*)$:

$$F^* = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cc} f(e_1^*) & f(e_2^*) \end{array} \end{array} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{B}^*}$$

Nous représentons la situation par un schéma :

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}) \arrow[r, "F"] & (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}) \arrow[d, "P^{-1}"] \\
(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}^*) \arrow[u, "P"] \arrow[r, "F^*"] & (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}^*)
\end{tikzcd}$$

où $F \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ qu'on cherche

où $F^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{B}^*}$

P est la matrice de changement de base de $\mathcal{B}^*$ à $\mathcal{B}$.

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$t = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}^*} = -2e_1^* + 4e_2^* = \begin{pmatrix} - \\ - \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

$$= -2\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{matrix} -2\cdot 2 + 4\cdot(-3) \\ -2\cdot 3 + 4\cdot 2 \end{matrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

CRM

Calculons $P^{-1} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{13} & \frac{3}{13} \\ \frac{-3}{13} & \frac{2}{13} \end{pmatrix}$

Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors $\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\mathrm{Det}(A)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}$ avec $\mathrm{Det}(A) = ad - bc$.

Ainsi $F^* = P^{-1} F P$ ou $F = P \cdot F^* \cdot P^{-1}$

Calculons : $F = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{2}{13} & \frac{3}{13} \\ \frac{-3}{13} & \frac{2}{13} \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{2}{13} & \frac{3}{13} \\ \frac{-3}{13} & \frac{2}{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4-9}{13} & \frac{6+6}{13} \\ \frac{6+6}{13} & \frac{9-4}{13} \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} \frac{-5}{13} & \frac{12}{13} \\ \frac{12}{13} & \frac{5}{13} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}}$$

$$f((2;-1)) = f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}\right) = \begin{pmatrix} \frac{-5}{13} & \frac{12}{13} \\ \frac{12}{13} & \frac{5}{13} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-10-12}{13} \\ \frac{24-5}{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-22}{13} \\ \frac{19}{13} \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} -1{,}69 \\ 1{,}46 \end{pmatrix}$$

Quelle est la matrice de la symétrie d'axe (d) : $4x + 3y = 0$?

$e_1^* = (-3, 4)$, $e_2^* = (4 ; 3)$, $F^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$P = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

$$F = P \cdot F^* \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} -7/25 & -24/25 \\ -24/25 & 7/25 \end{pmatrix}$$

$d: \; ax + by + c = 0$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$$